THEODOSII

TRIPOLITAE

SPHAERICORUM LIBROS TRES

ERNESTUS NIZZE

RECOGNOVIT, LATINE REDDITOS EMENDAVIT, COMMENTARIIS
INSTRUXIT, APPENDICIBUS ET INDICE AUXIT.

CUM QUATTUOR TABULIS LAPIDI INCISIS.

BEROLINI MDCCCLII.

IMPENSIS GEORGII REIMERI.

THEODOSII

TRIPOLITAE

SPHAERICORUM LIBROS TRES

ERNESTUS NIZZE

RECOGNOVIT, LATINE REDDITOS EMENDAVIT, COMMENTARIIS INSTRUXIT, APPENDICIBUS ET INDICE AUXIT.

CUM QUATTUOR TABULIS LAP. INCISIS.

BEROLINI, MDCCCLII.

IMPENSIS GEORGII REIMER.

FRIDERICO CREUZER,

AUGUSTO BOECKH,

PRINCIPIBUS PHILOLOGORUM

LIBRUM HUNC

PUBLICUM PIETATIS TESTEM

CONSECRARE VOLUIT

E. N.

Notae subsidiorum huius editionis.

P = Ed. princ. Jo. Penae. Parisiis 1558. 4.

H = Edit. Josephi Huntii. Oxon. 1707. 8.

D = Sphaericae doctrinae propositiones gr. et lat. nunc primum editae per Cunr. Dasypodium. Argentorati 1572. 8.

V = Theodosii de sphaericis libri tres, a Jo. Voegelino restituti etc. Viennae 1529. 4.

M = Theodos. lat. p. F. Maurolycum. Messenae 1558. F.

ΘΕΟΔΟΣΙΟΥ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

ΟΡΟΙ.

α΄. Σφαῖρά ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχόμενον, πρὸς ἥν, ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προςπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

β΄. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ τοιοῦτο σημεῖόν ἐστιν.

γ΄. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περὶ ἣν μένουσαν εὐθεῖαν ἡ σφαῖρα στρέφεται.

δ΄, Πόλοι δὲ τῆς σφαίρας εἰσὶ τὰ πέρατα τοῦ ἄξονος(a), δηλαδὴ τῆς διαμέτρου.

ε΄. Κύκλου πόλος ἐν σφαίρᾳ ἐστὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἀφ' οὗ πᾶσαι προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ς΄. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων αἱ πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων πρὸς τοῖς αὐτοῖς σημείοις ἴσας γωνίας περιέχωσιν.

---

a) ἄξωνος *P.* et *H.* Non movet me Hero Alex. def. geom. XII ed. Hasenbalg, nam est mendum apertum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ, ἡ γενομένη ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γραμμὴ κύκλου περιφέρειά ἐστιν.

Σφαιρικὴ γὰρ ἐπιφάνεια ἐπιπέδῳ τινὶ τετμήσθω, ποιείσθω δὲ καὶ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὴν **ΑΒΓ** γραμμήν· λέγω, ὅτι ἡ **ΑΒΓ** γραμμὴ κύκλου περιφέρειά ἐστιν.

F. 1. Εἰ μὲν οὖν τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶ τῆς σφαίρας· φανερὸν, ὅτι ἡ **ΑΒΓ** γραμμὴ κύκλου περιφέρειά ἐστιν· αἱ γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν προσπίπτουσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καί ἐστιν ἡ **ΑΒΓ** γραμμὴ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὥστε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν **ΑΒΓ** γραμμὴν προσπίπτουσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καὶ ὑπόκειται τὸ **ΑΒΓ** ἐπίπεδον διὰ κέντρου τῆς σφαίρας ὄν· ὥστε ἡ **ΑΒΓ** γραμμὴ κύκλου περιφέρειά ἐστιν, ἧς κέντρον τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τῆς σφαίρας.

Πόρισμα α'. *Καὶ ἐκ τούτου φανερὸν, ὅτι τοῦ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ὄντος κύκλου τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς σφαίρας*(a).

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τὸ δὲ κέντρον τῆς σφαίρας ἔστω τὸ **Δ** σημεῖον· καὶ ἀπὸ τοῦ **Δ** σημείου ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ **ΔΕ**, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ **Ε** σημεῖον, καὶ προςπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ **Ε** σημείου πρὸς τὴν **ΑΒΓ** γραμμὴν εὐθεῖαι αἱ **ΕΑ**, **ΕΒ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΔΑ**, **ΔΒ**.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΔΒ**, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς **ΑΔ** ἴσα τὰ ἀπὸ **ΑΕ**, **ΕΔ**, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΔΒ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΒΕ**, **ΕΔ**, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ **Ε** γωνιῶν· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΔ** ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΒΕ**, **ΕΔ**· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΕ**, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΕ** τῇ **ΕΒ**.

Ὁμοίως δὴ (b) δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ **Ε** πρὸς τὴν **ΑΒΓ** γραμμὴν προσπίπτουσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἡ ἄρα **ΑΒΓ** γραμμὴ κύκλου περιφέρειά ἐστιν, ἧς κέντρον τὸ **Ε**.

Πόρισμα β'. *Ἐκ δὴ* (c) *τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ᾖ ἐν*

---

a) Desideratur hoc *πόρισμα α'* in cod. mscto Saviliano, teste Huntio in praefatione.

b) δὲ *P.* et *H.* Sed nisi hoc loco et altero (pr. 10.) nusquam reperio ὁμοίως δὲ, quum δὴ ubivis inveniatur. Eademque formula solemnis Euclidi.

c) Ita *D.* δὲ *P* et *H.*

σφαίρᾳ κύκλος, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ κέντρον πεσεῖται τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Τῆς δοθείσης σφαίρας τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἔστω δοθεῖσα σφαῖρα, δεῖ δὲ τὸ αὐτῆς κέντρον εὑρεῖν.

Τετμήσθω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τινὶ, ποιήσει δὲ τομὴν F. 2.
κύκλον. Ποιείτω τὸν ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΔΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Ε, Ζ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΖ δίχα κατὰ τὸ Η σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας.

Μὴ γὰρ, ἀλλ', εἰ δυνατὸν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Κ σημεῖον· τὸ ἄρα Κ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου· ἀλλὰ καὶ τὸ Δ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο πλὴν τὸ Η. Τὸ Η ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας.

Πόρισμα. Ἐκ δὴ (a) τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἀνασταθῇ, ἐπὶ τῆς ἀνασταθείσης τὸ κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'. ΘΕΩΡ.

Σφαῖρα ἐπιπέδου μὴ τέμνοντος οὐχ (b) ἅπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ ἕν.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, σφαῖρα ἐπιπέδου μὴ τέμνοντος ἁπτέσθω κατὰ F. 3.
πλείονα σημεῖα τὰ Α, Β· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΑΓ, ΒΓ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κύκλου περιφέρειαν, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. Ποιείτω οὖν ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὸν ΔΑΒ κύκλον, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν τὴν ΕΑΒΖ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον οὐ τέμνει τὴν σφαῖραν, ἔστι δὲ ἐν μὲν

---

a) Ita *P.* et *D.* δὲ *H.*
b) Sic *D.* οὐκ *P.* et *H.*

τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας ὁ κύκλος, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ ἡ εὐθεῖα, οὐδὲ τὸν ΔΑΒ κύκλον ἄρα τέμνει ἡ ΕΑΒΖ εὐθεῖα. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΔΑΒ ἐπὶ τῆς περιφερείας εἴληπται δύο σημεῖα τυχόντα τὰ Α, Β, ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου ΔΑΒ, ἀλλὰ καὶ ἐκτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Σφαῖρα ἄρα ἐπιπέδου μὴ τέμνοντος οὐχ ἅψεται κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ ἕν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδου ἅπτηται μὴ τέμνοντος, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

F. 4. Σφαῖρα γὰρ ἐπιπέδου τινὸς ἁπτέσθω μὴ τέμνοντος κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ Β σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΑ· λέγω, ὅτι ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον, τομὴν δὲ ποιήσει ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κύκλον, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. Ποιείτω οὖν ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὸν ΑΓΔ κύκλον, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τὴν ΕΑΖ εὐθεῖαν. Πάλιν δὲ διὰ τῆς ΑΒ ἕτερον ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω, καὶ ποιείτω τὴν τομὴν ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὸν ΑΘ κύκλον, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τὴν ΚΑΛ εὐθεῖαν.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ΕΑΖ ἄρα εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΓΔ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΑΖ κατὰ τὸ Α σημεῖον, ἀπὸ δὲ τοῦ Α ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπέζευκται ἡ ΑΒ, ἡ ΑΒ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΕΑΖ, καὶ φανερὸν, ὅτι τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΓΔ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐκβέβληται διὰ τῆς ΒΑ, οὔσης ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπίπεδον τὸ τοῦ ΑΓΔ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐπὶ τὴν ΚΑΛ κάθετός ἐστιν ἡ ΒΑ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΑ δύο εὐθείαις ταῖς ΕΖ, ΚΛ τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς ὀρθὴ ἐφέστηκε, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΒΑ. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΕΖ, ΚΛ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ἐφαπτόμενον· ἡ ΑΒ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδου ἅπτηται μὴ τέμνοντος, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς τῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθῇ εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ἀνασταθείσης ἔσται τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

F. 5. Σφαῖρα γὰρ ἐπιπέδου ἁπτέσθω μὴ τέμνοντος κατὰ τὸ Α σημεῖον,

καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΒ ἐστι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Μὴ γὰρ, ἀλλ', εἰ δυνατὸν, ἔστω τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ.

Ἐπεὶ οὖν σφαῖρα ἐπιπέδου ἅπτεται μὴ τέμνοντος κατὰ τὸ Α σημεῖον, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπέζευκται ἡ ΓΑ, ἡ ΓΑ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ἐπίπεδον· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΑ ὀρθὴ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Α τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὑποκειμένῳ δύο πρὸς ὀρθὰς ἀνιστάμεναί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο, πλὴν τὸ ἐπὶ τῆς ΒΑ. Ἐπὶ τῆς ΒΑ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ. Α. ΘΕΩΡ.

Τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας μέγιστοί εἰσι· τῶν δ' ἄλλων οἱ μὲν ἴσον ἀπέχοντες ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου ἴσοι εἰσὶν, οἱ δὲ μεῖζον ἐλάσσονες.

Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, καὶ ὁ μὲν ΓΔ F. 6. ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, οἱ δὲ ΑΒ, ΕΖ πρότερον ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου· λέγω, ὅτι μέγιστος μέν ἐστιν ὁ ΓΔ, ἴσοι δέ εἰσιν οἱ ΑΒ, ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ Η σημεῖον, τὸ αὐτὸ ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ΓΔ κύκλου· καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Η σημείου ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΕΖ κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι αἱ ΗΘ, ΗΚ, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς τῶν κύκλων ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Θ, Κ σημεῖα· τὰ Θ, Κ ἄρα σημεῖα κέντρα ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΕΖ κύκλων. Ἐκβεβλήσθωσαν ἀπὸ τῶν Θ, Η, Κ ἐπὶ τοὺς κύκλους εὐθεῖαι αἱ ΘΛ, ΗΜ, ΚΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΛ, ΗΝ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΗΘ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ (a) ΑΒ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς γωνίας ποιεῖ. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΘΛ, οὖσα ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΘΗ γωνία. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΗΚΝ ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΘΛ, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΛΗΘ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΘΗ τῆς ὑπὸ ΛΗΘ, πλευρὰ ἄρα ἡ ΛΗ πλευρᾶς τῆς ΛΘ ἐστὶ μείζων. Καί ἐστιν ἡ ΛΗ τῇ ΗΜ ἴση, διὰ τὸ,

a) πρὸς τοῦ *P.* et *H.*

τὸ Η σημεῖον κέντρον εἶναι τῆς σφαίρας, καὶ προςπεπτωκέναι ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὰς ΛΗ, ΗΜ· καὶ ἡ ΗΜ ἄρα τῆς ΛΘ μείζων ἐστί. Καὶ ἡ μὲν ΗΜ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΓΔ κύκλου, ἡ δὲ ΛΘ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒ κύκλου· μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΔ κύκλος τοῦ ΑΒ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πάντων τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων καὶ μὴ ὄντων διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ οἱ ΑΒ, ΕΖ κύκλοι εἰσὶν ἴσοι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ ΑΒ, ΕΖ κύκλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΛ τῇ ΗΝ, ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΛΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΝ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΛΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΘ, ΘΗ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΝ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΗΚ, ΚΝ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΘ, ΘΗ ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΗΚ, ΚΝ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΘΛ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΝ ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΛ τῇ ΚΝ. Καί ἐστιν ἡ μὲν ΘΛ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒ κύκλου, ἡ δὲ ΚΝ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖ κύκλου, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖ κύκλου, ἴσος ἄρα ὁ ΑΒ κύκλος τῷ ΕΖ κύκλῳ.

F. 7. Ἀλλὰ δὴ πάλιν μεῖζον ἀπεχέτω ὁ ΑΒ κύκλος τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἤπερ ὁ ΕΖ· λέγω, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΑΒ κύκλος τοῦ ΕΖ κύκλου.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεὶ μεῖζον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ὁ ΑΒ κύκλος, ἤπερ ὁ ΕΖ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΗ τῆς ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΛ τῇ ΗΝ, τὸ γὰρ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, καὶ τὰ Λ, Ν πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ· ἴσον ἄρα ἐστὶ (a) τὸ ἀπὸ τῆς ΗΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΝ, τοῦτ' ἔστι, τὰ ἀπὸ τῶν ΛΘ, ΘΗ τοῖς ἀπὸ τῶν ΗΚ, ΚΝ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΗ μεῖζόν ἐστι· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΛΘ λοιποῦ τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΚ ἔλασσόν ἐστιν, ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΘ τῆς ΝΚ. Καί ἐστιν ἡ μὲν ΘΛ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒ κύκλου, ἡ δὲ ΝΚ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖ κύκλου· Καὶ ὁ ΑΒ ἄρα κύκλος ἐλάττων ἐστὶ τοῦ ΕΖ κύκλου.

Τῶν ἄρα ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας μέγιστοί εἰσι, τῶν δὲ ἄλλων οἱ μὲν ἴσον ἀπέχοντες ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἴσοι εἰσὶν, οἱ δὲ μεῖζον ἐλάσσονες.

---

a) ἴσον ἐστὶ *P.* et *H.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ. Β. ΘΕΩΡ. (a).

Δείξομεν δʹ ἀντιστρόφως, ὅτι τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν μέγιστοι διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶ τῆς σφαίρας, τῶν δὲ ἄλλων οἱ μὲν ἴσοι ἴσον ἑκατέρωθεν ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, οἱ δὲ ἐλάσσονες μεῖζον.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἔστω ὁ ΓΔ κύκλος μέγιστος· F. 6.
λέγω, ὅτι ἔσται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω μὴ διὰ τοῦ κέντρου. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη, ὅτι ὁ διὰ τοῦ κέντρου μείζων ἐστὶ πάντων τῶν μὴ διὰ τοῦ κέντρου κύκλων, ὁ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου μείζων ἔσται τοῦ ΓΔ· ὁ ἄρα ΓΔ κύκλος οὐκ ἔσται μέγιστος, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ μέγιστος· ὁ ἄρα ΓΔ κύκλος μέγιστος διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶ τῆς σφαίρας.

Πάλιν ἔστωσαν οἱ ΑΒ, ΕΖ κύκλοι ἴσοι· λέγω, ὅτι ἴσον ἀπέχουσι τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσοι εἰσὶν, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΛ τῇ ΚΝ· ἴση δὲ καὶ ἡ ΗΛ τῇ ΗΝ, καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΘ, ΘΗ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΝ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΗΚ, ΚΝ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΛΘ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΚ ἴσον ἐστὶν, ἡ ἄρα ΘΗ τῇ ΗΚ ἴση ἐστίν. Ἴσον ἄρα ἀπέχουσι τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας οἱ ἴσοι κύκλοι.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἐλάσσων ἔστω ὁ ΑΒ κύκλος τοῦ ΕΖ κύκλου· F. 7.
λέγω, ὅτι μεῖζον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ὁ ΑΒ κύκλος ἤπερ ὁ ΕΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΖΕ, ἡ ἄρα ΘΛ τῆς ΚΝ ἐστιν ἐλάσσων· καί ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΛ τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΘ, ΘΗ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΝ τοῖς ἀπὸ τῶν ΝΚ, ΚΗ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΛΘ, ΘΗ τοῖς ἀπὸ τῶν ΝΚ, ΚΗ ἴσα ἐστὶν, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΛΘ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΚ μεῖζον· ἡ ἄρα ΘΗ τῆς ΗΚ μείζων ἐστίν. Οἱ ἄρα ἐλάσσονες κύκλοι μεῖζον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

---

a) Dasypodio deest haec praecedentis conversa, neque reperitur in cod. mscto Saviliano. *P.* et *H.* non secernunt ab ipsa praecedente propositione; Huntius tamen typis maiusculis exprimi curavit. Sed satius duxi propositionem revera peculiarem, servato numerorum ordine, ita ut vides separasse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ΄. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα ὀρθή ἐστι πρὸς τόν κύκλον.

F. 8. Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ τὸ μὲν κέντρον τῆς σφαίρας ἔστω τὸ Ε σημεῖον, τὸ δὲ τοῦ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Διήχθωσαν γὰρ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου αἱ ΑΖΓ, ΒΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ. δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΕ δυσὶ ταῖς ΔΖ, ΖΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΕΔ ἐστὶν ἴση, τὸ γὰρ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, καὶ τὰ Β, Δ πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΖΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση, Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΖΕ, ΔΖΕ, ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΒΔ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῇ ΑΓ, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΕ, ΓΕ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΕΖ δυσὶν εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΒΔ, τεμνούσαις ἀλλήλας, ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκε, καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΓ, ΒΔ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΑΓ, ΒΑ ἐπίπεδόν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἀχθῇ καὶ ἐκβληθῇ ἐπ' ἀμφότερα(a) τὰ μέρη· ἐπὶ τοὺς πόλους πεσεῖται τοῦ κύκλου.

F. 9. Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΔΕ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ε σημεῖον· τὸ Ε ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπ' ἀμφότερα τὰ μέρη, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Ζ, Η σημεῖα· λέγω, ὅτι τὰ Ζ, Η σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Διήχθωσαν γὰρ αἱ ΑΕΓ, ΒΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΓ, ΑΗ, ΗΓ.

---

a) Ita *P.* et *H.* ἀχθῇ ἐπ' ἀμφότερα *D.*

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΕ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΖΕΑ, ΖΕΓ, ΖΕΒ, ΖΕΘ γωνιῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΓΖ ἐστιν ἴση. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν προςπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· τὸ Ζ ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ Η σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου· τὰ Ζ, Η ἄρα σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ἐὰν ἄρα ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ϛʹ. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δέ τινος τῶν πόλων αὐτοῦ ἐπ' αὐτὸν κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· ἐπὶ τὸ κέντρον πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ προςεκβαλλομένη ἐπὶ τὸν ἕτερον πόλον πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἀπὸ δέ τινος τῶν πόλων αὐτοῦ F. 10.
τοῦ Δ κάθετος ἤχθω ἐπ' αὐτὸν ἡ ΔΕ, καὶ συμβαλλέτω τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ μὲν Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τὸ δὲ Ζ ὁ ἕτερος πόλος ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Διήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε αἱ ΕΑ, ΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ, ΑΖ, ΒΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὖσα ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΕΑ, ΔΕΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΕ, ΕΔ· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ λοιπῷ, ἴση ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προςπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσί· τὸ Ε ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τὸ Ζ σημεῖον ὁ ἕτερος πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΒΖ ἴση ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ (*a*) γραμμὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσί. Τὸ Ζ ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τὸ δὲ Δ ὁ ἕτερος πόλος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἡ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν κύκλον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τε καὶ τῆς σφαίρας ἐλεύσεται.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, πόλοι δὲ αὐτοῦ ἔστωσαν τὰ
F. 11. Ε, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ διὰ τῶν πόλων ἀγομένη, καὶ ἔστω ἡ ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ τῆς σφαίρας ἐλεύσεται.

Συμβαλλέτω γὰρ τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η σημεῖον ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου διήχθωσαν αἱ ΑΗΓ, ΒΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΔ, ΒΖ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΒΖ βάσει τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστί. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΗ, δύο δὴ αἱ ΒΕ, ΕΗ δυσὶ ταῖς ΕΗ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΕΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΗ βάσει τῇ ΗΔ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΕΒΗ τρίγωνον τῷ ΕΔΗ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἔσονται ἴσαι, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΗΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΗΕ γωνίᾳ. Ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΗΕ, ΔΗΕ γωνιῶν, ἡ ΕΗ ἄρα τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. Ὁμοίως δὴ (*b*) δειχθήσεται, ὅτι ἡ ΕΗ τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ ΕΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΑΓ ἄρα ἐπιπέδῳ, τοῦτ᾽ ἔστι τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ ΕΖ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ τῆς σφαίρας ἥξει.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ, ἀπὸ δέ τινος τῶν πόλων αὐτοῦ ἐπ᾽ αὐτὸν κάθετος ἦκται ἡ ΕΗ, καὶ συμβάλλει τῷ ἐπι-

---

a) AB exhibent *P.* et *H.*, quod ferri non potest, nam linea AB dimetiens est, neque vero circumducta. Magis etiam placeret ΑΒΓ περιφέρειαν, sed prop. 1 vetat, quo minus ita scribam.

b) δὲ *P.* et *H.*

πέδῳ κατὰ τὸ Η σημεῖον, τὸ Η ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τοῦ Η τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἀνέσταται (a) ἡ ΕΗΖ, ἐπὶ τῆς ΕΗΖ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἡ ΕΖ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶ τῆς σφαίρας. Ἡ ΕΖ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓΔ (b) κύκλον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ τῆς σφαίρας ἔρχεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'. ΘΕΩΡ.

Ἐν σφαίρᾳ οἱ μέγιστοι κύκλοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλους.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν F. 12.
ἀλλήλους κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα· λέγω, ὅτι οἱ ΑΒ, ΓΔ κύκλοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλους.

Εἰλήφθω γὰρ αὐτῶν τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Η, τὸ δὲ αὐτό ἐστι καὶ τῆς σφαίρας, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἡ ΕΗ, ΗΖ.

Καὶ ἐπεὶ τὰ Ε, Η, Ζ σημεῖα ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἐστὶν, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ ΔΓ· ἐπὶ ἀμφοτέροις ἄρα τοῖς ἐπιπέδοις τῶν ΑΒ, ΓΔ κύκλων τὰ Ε, Η, Ζ σημεῖά ἐστι, τὰ Ε, Η, Ζ ἄρα ἐν τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἐστί. Πάντως δὲ δύο ἐπιπέδων ἡ κοινὴ τομὴ εὐθεῖά ἐστιν, εὐθεῖά ἐστιν ἄρα ἡ ΕΗΖ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒ κύκλου, ἡ ΕΖ ἄρα διάμετρός ἐστιν αὐτοῦ, ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΑΖ, ΕΒΖ ἡμικύκλιόν ἐστι. Πάλιν ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔ κύκλου, ἡ ΕΖ ἄρα διάμετρός ἐστιν αὐτοῦ, ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΓΖ, ΕΔΖ ἡμικύκλιόν ἐστιν. Οἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα κύκλοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλους.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'. ΘΕΩΡ.

Ἐν σφαίρᾳ οἱ δίχα τέμνοντες ἀλλήλους κύκλοι μέγιστοί εἰσιν.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλους F. 13.
δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα· λέγω, ὅτι οἱ ΑΒ, ΓΔ κύκλοι μέγιστοί εἰσιν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΕΖ, ἡ ΕΖ ἄρα διάμετρός ἐστι τῶν ΑΒ, ΓΔ κύκλων· λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῆς σφαίρας. Τετμήσθω ἡ ΕΖ δίχα κατὰ τὸ Η· τὸ Η ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν κύκλων. Ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῷ μὲν τοῦ ΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΘ, τῷ δὲ τοῦ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΚ.

---

a) ἀνίσταται *P.* et *H.* Cfr propp. 2 et 12.
b) πρὸς ΑΒΓΔ *P.* et *H.*

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΓΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνέσταται ἡ ΗΘ· ἐπὶ τῆς ΗΘ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς ΗΚ, ἐπὶ τῆς ἄρα κοινῆς τομῆς τῶν ΗΘ, ΗΚ, τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἐστίν· ἡ δὲ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἐστι τὸ Η σημεῖον· τὸ Η ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας. Ἔστι δὲ καὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ κύκλων κέντρον τὸ Η σημεῖον, οἱ δὲ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντες τῆς σφαίρας κύκλοι μέγιστοί εἰσι· ἐν σφαίρᾳ ἄρα δίχα τέμνοντες ἀλλήλους κύκλοι μέγιστοί εἰσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ (a) πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, δίχα αὐτὸν τέμνει καὶ διὰ τῶν πόλων.

F. 14. Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΕΒΖΔ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω· λέγω, ὅτι δίχα αὐτὸν τέμνει καὶ διὰ τῶν πόλων.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ἡ ΒΔ, καὶ εἰλήφθω κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ Η σημεῖον· τὸ δὲ αὐτό ἐστι καὶ τῆς σφαίρας· καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η σημείου ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἡ ΗΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' ἀμφότερα τὰ μέρη, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Α, Γ σημεῖα.

Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς ἄλληλα, τό τε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τὸ τοῦ ΕΒΖΔ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ αὐτῶν τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΘΑ, ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων οὖσα τῷ ΑΒΓΔ· ἡ ΑΓ ἄρα καὶ τῷ ΕΒΖΔ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΕΒΖΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἦκται ἡ ΗΘ, καὶ συμπίπτει τῷ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Θ σημεῖον· τὸ Θ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου, ἑκάτερον ἄρα τῶν ΒΕΔ, ΒΖΔ ἡμικύκλιόν ἐστιν· ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος τὸν ΕΒΓΔ κύκλον δίχα τέμνει.

Λέγω δή, ὅτι καὶ διὰ τῶν πόλων.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΕΒΖΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἦκται ἡ ΗΘ, καὶ ἐκβέβληται

---

a) Verba τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ omittunt *P.* et *H.*, quamquam et in duabus deinceps propositionibus, et in ipsa huius theorematis expositione suo loco leguntur. Dasypodius sphalmate typographico deformatam lectionem exhibet τῷ ἐν τῇ σφαίρᾳ, unde genuinam facile restitui.

ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ συμπίπτει τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Α, Γ· ἐὰν δὲ ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἐκβληθῇ ἐπ' ἀμφότερα τὰ μέρη, ἐπὶ τοὺς πόλους πεσεῖται τοῦ κύκλου· τὰ Α, Γ ἄρα σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ ΕΒΖΔ, ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει· ἔτεμνε δὲ αὐτὸν καὶ δίχα· ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον δίχα τε καὶ διὰ τῶν πόλων τέμνει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδʹ. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ μέγιστον ὄντα δίχα τέμνῃ, πρὸς ὀρθάς τε αὐτὸν τέμνει καὶ διὰ τῶν πόλων.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ μέγιστον ὄντα τὸν ΕΒΖΔ δίχα τεμνέτω· λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθάς τε αὐτὸν τεμεῖ, καὶ διὰ τῶν πόλων. **F. 14.**

Ἐπεζεύχθω γὰρ αὐτῶν ἡ κοινὴ τομὴ ἡ ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον δίχα τέμνει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΒΕΔ, ΒΖΔ ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἡ ΒΔ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου. Τετμήσθω οὖν ἡ ΒΔ δίχα κατὰ τὸ Θ σημεῖον, τὸ Θ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ Η σημεῖον, τὸ δὲ αὐτὸ καὶ τῆς σφαίρας ἐστί· καὶ ἐπεζευχθεῖσα ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ συμπιπτέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Α, Γ σημεῖα.

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΕΒΖΔ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπέζευκται εὐθεῖα ἡ ΗΘ, ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΕΒΖΔ, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΗΘ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸν ΕΒΖΔ· ἓν δὲ τῶν διὰ τῆς ΗΘ ἐπιπέδων ὁ ΑΒΓΔ ἐστὶ κύκλος, καὶ ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΕΒΖΔ· ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον πρὸς ὀρθὰς τέμνει.

Λέγω δή, ὅτι καὶ διὰ τῶν πόλων· ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΕΒΖΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἦκται ἡ ΗΘ, καὶ ἐκβέβληται ἐπ' ἀμφότερα τὰ μέρη, καὶ συμπίπτει τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Α, Γ σημεῖα· τὰ Α, Γ ἄρα σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ ΕΒΖΔ, ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἄρα τὸν ΕΒΖΔ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει· ἔτεμνε δὲ αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθάς, ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἄρα τὸν ΕΒΖΔ κύκλον πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ διὰ τῶν πόλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων τέμνῃ, δίχα τε αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.

F. 14. Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΕΒΖΔ τεμνέτω διὰ τῶν πόλων· λέγω, ὅτι δίχα τε αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.

Ἔστωσαν γὰρ οἱ πόλοι τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου τὰ Α, Γ σημεῖα, φανερὸν δὴ, ὅτι ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου εἰσὶ, διὰ γὰρ τῶν πόλων τέμνει ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΕΒΖΔ, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτοῦ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΑΓ· ἐὰν δὲ ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἡ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν κύκλον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τε καὶ τῆς σφαίρας ἐλεύσεται· ἡ ΑΓ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΕΒΖΔ κύκλον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΑΓ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸν ΕΒΖΔ. Ἓν δὲ τῶν διὰ τῆς ΑΓ ἐπιπέδων ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος· ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΕΒΖΔ κύκλον· ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος τὸν ΕΒΖΔ πρὸς ὀρθὰς τέμνει· τέμνει δὲ αὐτὸν καὶ δίχα (a)· ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνων δίχα τε αὐτὸν τέμνει καὶ πρὸς ὀρθάς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος, ἡ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου.

F. 15. Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἐγγραφομένου.

Ἤχθωσαν γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Ε σημείου τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, τὸ Ζ ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΖ, ἡ ΒΑ ἄρα τετραγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἐγγραφομένου· ἡ δὲ ΖΑ ἐκ τοῦ πόλου ἐστί· λέγω, ὅτι ἡ ΖΑ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση.

---

a) Καὶ δίχα δὲ αὐτὸν τέμνει *P.* et *H.*

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΖΕ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ἡ ΕΖ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΕ, ΒΕ, ΔΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΖ· κοινὴ δὲ ἡ ΕΑ, δύο δὴ (a) αἱ ΒΕ, ΕΑ δυσὶ ταῖς ΑΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΑ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΑ βάσει τῇ ΑΖ ἴση ἐστί. Καί ἐστιν ἡ μὲν ΑΖ ἐκ τοῦ πόλου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἡ δὲ ΒΑ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· ἡ ἄρα ἐκ τοῦ πόλου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ΄. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ᾖ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· καὶ αὐτὸς μέγιστος ἔσται.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ, πόλος δὲ αὐτοῦ τὸ Δ σημεῖον, ἡ δὲ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἡ ΔΓ ἴση ἔστω τῇ τοῦ τετραγώνου (b) πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· λέγω, ὅτι ὁ ΑΒΓ μέγιστός ἐστιν. F. 16.

Ἐκβεβλήσθω διὰ τῆς ΔΓ καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπίπεδον, τομὴν δή τινα ποιήσει μέγιστον κύκλον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας· ποιείτω τὸν ΒΔΓΕ, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὴ τομὴ ἡ ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ.

Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΔΒ, καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΔΓ, ΔΒ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· ἡμικυκλίου ἄρα ἐστὶ περιφέρεια ἡ ΒΔΓ, διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τοῦ ΒΔΓΕ κύκλου. Καὶ ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ὁ ΔΒΕΓ ἄρα κύκλος τὸν ΑΒΓ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ ὁ ΔΒΕΓ κύκλος τὸν ΑΒΓ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει· καὶ αὐτῶν κοινὴ τομή ἐστιν ἡ ΒΓ, ἡ ΒΓ ἄρα (c) διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου· ἔστι δὲ καὶ τῆς σφαίρας· μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓ κύκλος.

---

a) δὲ *P.* et *H.* Cfr. propp. 7 et 10.
b) τῇ τετραγώνου *P.* et *H.*
c) τομή ἐστιν ἡ ΒΓ, ἄρα *P. et H.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'. ΠΡΟΒΛ.

Τοῦ δοθέντος ἐν σφαίρᾳ κύκλου τῇ διαμέτρῳ ἴσην ἐκθέσθαι.

F. 17. Ἔστω ὁ δοθεὶς ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ, δεῖ δὲ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τῇ διαμέτρῳ ἴσην ἐκθέσθαι.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΔΕΖ, ἴσην ἔχον τὴν ΔΕ τῇ ΑΒ, τὴν δὲ ΕΖ τῇ ΒΓ, τὴν δὲ ΖΔ τῇ ΑΓ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Ε σημείου τῇ ΕΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΖ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ· ἤχθω δὲ καὶ διάμετρος τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἡ ΑΘ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἴση ἐστὶ τῇ ΑΘ.

Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΓΘ.

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστίν· ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΘΓ ἴση ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΔΗΖ (*a*), καὶ ἡ ὑπὸ ΑΘΓ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΗΖ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΘ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΗ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΘΓ, ΔΗΖ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΘ, ΓΘΑ ταῖς δυσὶ γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΔΖΗ, ΖΗΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἡ ΑΘ ἄρα τῇ ΔΗ ἴση ἐστί. Καί ἐστιν ἡ ΑΘ διάμετρος τοῦ κύκλου· ἡ ΔΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τοῦ κύκλου διαμέτρῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'. ΠΡΟΒΛ.

Τῆς δοθείσης σφαίρας τῇ διαμέτρῳ ἴσην ἐκθέσθαι.

F. 18. Νενοήσθω γὰρ ἡ σφαῖρα, ἧς δεῖ τῇ διαμέτρῳ ἴσην ἐκθέσθαι· καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας δύο τυχόντα σημεῖα

---

a) Est profecto, in quo offendam, praesertim in Theodosio, vel subobscuris lumen afferre solente. Demonstratio facilis quidem est, sed eo magis eam desidero, quod iam in sequente propositione ad hanc thesin ut demonstratione confirmatam diserte provocet noster. Inde lacunam suspicor. Eorum quae desidero, ultima verba sic fortasse sonarunt: ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΔΗΖ, ita ut oculi librarii verborum similitudine falsi a versu ad versum aberraverint.

τὰ Α, Β, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ κύκλου τῇ διαμέτρῳ ἴσην ἐκθέσθαι. Ἐκ τριῶν οὖν εὐθειῶν, αἵ εἰσι δύο μὲν ταῖς ἐκ τοῦ πόλου τοῦ ΒΓΔ ἴσαι, μία δὲ τῇ διαμέτρῳ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΕΖΗ, ὥςτε ἴσην εἶναι ἑκατέραν τῶν ΖΕ, ΕΗ ἑκατέρᾳ τῇ ἐκ τοῦ πόλου τοῦ Α, τὴν δὲ ΖΗ τῇ διαμέτρῳ· καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ζ, Η ταῖς ΖΕ, ΕΗ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι γραμμαὶ αἱ ΖΘ, ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΘ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας.

Νενοήσθω γὰρ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἡ ΑΚ, καὶ διὰ τῆς ΑΚ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει μέγιστον κύκλον· ποιείτω τὸν ΑΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΑΒ, ΒΔ, ΔΚ.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ (a) ταῖς ΕΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, βάσις δὲ ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΕΗ ἴση ἐστὶ, γωνία ἄρα ἡ (b) ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΖΗ ἴση ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΚΔ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΖΗ τῇ ὑπὸ ΕΘΗ ἴση, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου δέδεικται· ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΔΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΕΗΘ ἴσῃ· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΚΔ, ΕΘΗ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΔΚ, ΔΚΑ ταῖς δυσὶ γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΕΗΘ, ΗΘΕ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΑΔ τῇ ΕΗ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΕΘ. Καί ἐστιν ἡ ΑΚ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΕΘ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'. ΠΡΟΒΛ.

Διὰ δύο δοθέντων σημείων, ἅ ἐστιν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, μέγιστον κύκλον γράψαι.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο σημεῖα τὰ Α, Β ἅ ἐστιν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας· δεῖ δὴ διὰ τῶν Α, Β σημείων μέγιστον κύκλον γράψαι. **F. 19.**

Εἰ μὲν τὰ Α, Β κατὰ διάμετρόν ἐστι τῆς σφαίρας, φανερὸν, ὅτι μέγιστοι κύκλοι ἄπειροι διὰ τῶν Α, Β σημείων γραφήσονται. Μὴ ἔστω δὴ τὰ Α, Β σημεῖα κατὰ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας. Καὶ πόλῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον γραφομένου, κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΔΕ, μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΔΕ, ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ

a) Ita *H.* δύο *P.*
b) *γωνία ἡ* *P.* et *H.*

τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. Πάλιν πόλῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, κύκλος γεγράφθω ὁ ΖΕΗ, μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΕΗ κύκλος, ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ, τοῦ γραφομένου εἰς τὸν μέγιστον κύκλον. Καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὰ Α, Β εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΕΒ.

Ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΑ, ΕΒ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, ἴση ἄρα ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ ἐστιν. Ὁ ἄρα πόλῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΕΒ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Α, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΕΑ τῇ ΕΒ. Ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ὁ ΑΒΘ, μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΑΘ κύκλος, ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. Διὰ δύο ἄρα δοθέντων σημείων τῶν Α, Β, ἅ ἐστιν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΑΒΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα′. ΠΡΟΒΛ.

Τοῦ δοθέντος ἐν σφαίρᾳ κύκλου τὸν πόλον εὑρεῖν.

F. 20. Ἔστω ὁ δοθεὶς ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ, δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸν πόλον εὑρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπειλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΔΑ, ΑΕ, ἡ δὲ λοιπὴ ΔΕ δίχα τεμνέσθω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· ὁ δὴ ΑΒΓ κύκλος ἤτοι μέγιστός ἐστιν, ἢ οὔ.

Ἔστω πρότερον μὴ μέγιστος, καὶ διὰ δύο δοθέντων σημείων τῶν Ζ, Α, ἅ ἐστιν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΖΑΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ περιφέρεια τῇ ΑΕ περιφερείᾳ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ ἴση, ὅλη ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔΖ ὅλῃ τῇ ΑΕΖ ἴση· ὁ ΖΑΘ ἄρα κύκλος τὸν ΑΒΓ κύκλον δίχα τέμνει. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΖΘ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ μέγιστον ὄντα δίχα τέμνει, πρὸς ὀρθάς τε αὐτὸν τέμνει καὶ διὰ τῶν πόλων· ὁ ΖΘΑ ἄρα τὸν ΑΒΓ πρὸς ὀρθάς τε καὶ διὰ τῶν πόλων τέμνει. Τετμήσθω ἡ ΖΑ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ Η σημεῖον· τὸ Η ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὁ ΑΒΓ κύκλος μέγιστος ἔστω. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔΖ περιφέρεια τῇ ΑΕΖ περιφερείᾳ.

Τετμήσθω δὴ ἡ ΑΓΖ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΖ περιφερειῶν τεταρτημόριά ἐστιν· ὁ ἄρα πόλῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΖ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Α σημείου, ἐπείπερ τὸ Α τῷ Ζ κατὰ διάμετρόν ἐστιν. Ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς.ὁ (a) ΖΑΘ, ὁ ἄρα ΖΑΘ κύκλος μέγιστός ἐστιν, ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ ἐστι, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. Καὶ ἐπεὶ τὸ Γ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΖΑΘ κύκλου, ὁ ΑΒΓ ἄρα κύκλος τὸν ΖΑΘ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΖΑΘ διὰ πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τέμνει καὶ πρὸς ὀρθάς· ὁ ΑΒΓ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΖΑΘ κύκλον, καὶ ὁ ΖΑΘ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΖΑΘ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΑΒΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τέμνει καὶ διὰ τῶν πόλων· ὁ ΖΑΘ ἄρα κύκλος τὸν ΑΒΓ κύκλον δίχα τε καὶ διὰ τῶν πόλων τέμνει. Τετμήσθω ἡ ΖΑ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ Η σημεῖον· τὸ Η ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'. ΘΕΩΡ. (b)

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου οὖσα

a) ἡ *P.* et *H.*

b) Utramque propositionem 22 et 23 subditiciam esse contendo. De prop. 22 dubitationem affert iam locus, in quo collocata est; certe exspectares, si genuina esset, ante prop. 7, ubi commode conferri potuisset ad demonstrationem nunc aliunde petitam. Deinde me vexat, quod Theodosius nullo totius operis loco hac propositione utatur. Tertio demonstrationis ratio et via mire recedit ab eius consuetudine. Quarto loquendi modus male me habet: ut taceam formulam ἡ ἀπόδειξις, ὡς ἐν τοῖς κυκλικοῖς, iam verba καὶ τῆς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσης Theodosium non redolent, qui potius scripsisset καὶ διὰ τῆς εὐθείας τῆς μὴ rel. Neque minus haesito in verbis τομὴν ποιήσουσι γραμμὴν κύκλου; alibi enim ita fere loquitur: (ἐπίπεδον) ποιεῖ τομὴν κύκλον (pr. 2. 17. 19) aut γραμμὴν κύκλου περιφέρειαν (pr. 1). Accedit quod in editione Dasypodii haec verba inveniuntur propositioni annexa: Ἰστέον, ὅτι τὸ παρὸν θεώρημα καὶ τὸ μετ' αὐτὸ ἔν τισι τῶν ἀντιγραφῶν οὐχ εὑρίσκονται (l. εὑρίσκεται)· τοῦτο μὲν ὡς σαφέστερον, τὸ δὲ μετ' αὐτὸ ὡς τῷ ἑβδόμῳ θεωρήματι ταὐτὸν ὄν, τῇ πτώσει δὲ μόνῃ διαφέρον. Denique apud Voegelinum neque hanc neque sequentem propositionem inveniri animadvertendum est. De prop. 23 autem ambigi vix potest, utrum damnanda sit nec ne, quum prorsus eandem esse ac pr. 7 primo intuitu intelligas. Inde iam Clavius supervacaneum duxit eam repetere, nos autem loco movere noluimus, ne quid deesse videatur.

εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

Ἡ ἀπόδειξις, ὡς ἐν τοῖς κυκλικοῖς. Ἐὰν γὰρ διὰ τῆς διαμέτρου διὰ τοῦ κέντρου οὔσης τῆς σφαίρας, καὶ τῆς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσης ἐπίπεδον ἐκβληθῇ, τομὴν ποιήσουσι γραμμὴν κύκλον· καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου οὖσα εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνουσα, ὥστε καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα· ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τοῦ κύκλου.(*a*)

F. 20. Ἔστω γὰρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τὸ μὲν κέντρον τῆς σφαίρας ἔστω τὸ Δ σημεῖον, τὸ δὲ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον.

Διήχθω γάρ τις διὰ τοῦ κέντρου Ε (*b*) ὡς ἔτυχεν εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἡ ΑΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΒΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΒ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΒΕΔ γωνιῶν, ἡ ΔΕ ἄρα τῇ ΑΒ ἐστι πρὸς ὀρθάς. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πάσαις ταῖς διὰ τοῦ Ε ἀγομέναις εὐθείαις ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα εὐθεῖα τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

---

a) Sic *P.* et *H.* ἐπὶ τὸν κύκλον *D.*

b) Emendarem τοῦ Ε, si propositionem genuinam haberem.

ΘΕΟΔΟΣΙΟΥ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΟΡΟΣ.

Ἐν σφαίρᾳ κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, ὅταν ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἐφάπτηται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄. ΘΕΩΡ.

Ἐν σφαίρᾳ οἱ παράλληλοι κύκλοι περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσίν.

Ἔστωσαν γὰρ ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ· F. 21.
λέγω, ὅτι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσίν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ τοῦ ΑΒΓ κύκλου οἱ πόλοι, καὶ ἔστωσαν οἱ Η, Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ.

Καὶ ἐπεί, ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἡ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν κύκλον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τε καὶ τῆς σφαίρας ἐστίν· ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον. Καί ἐστιν ὁ ΑΒΓ κύκλος παράλληλος τῷ ΔΕΖ κύκλῳ· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΔΕΖ. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΔΕΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἦκται ἡ ΗΘ, καὶ ἐκβέβληται ἐπ' ἀμφότερα τὰ μέρη, καὶ συμπίπτει τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Η, Θ σημεῖα· ἐὰν δὲ ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἐκβληθῇ ἐπ' ἀμφότερα τὰ μέρη, ἐπὶ τοὺς πόλους πεσεῖται τοῦ κύκλου· τὰ Η, Θ ἄρα σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ

ΔΕΖ κύκλου. Οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἄρα κύκλοι περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσίν. (a)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'. ΘΕΩΡ.

Οἱ περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους ὄντες ἐν σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοί εἰσιν.

F. 21. Ἔστωσαν περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους τοὺς Η, Θ ἐν σφαίρᾳ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ· λέγω, ὅτι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι παράλληλοί εἰσιν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΗΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΑΒΓ, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτοῦ εὐθεῖα διῆκται ἡ ΗΘ· ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πρὸς τὸν ΔΕΖ κύκλον ἡ ΗΘ ὀρθή ἐστι. Πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, ἐκβαλλόμενα τὰ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται· ἐκβαλλόμενα ἄρα τὰ τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓ κύκλος τῷ ΔΕΖ κύκλῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνωσι, τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ· ἐφάψονται ἀλλήλων οἱ κύκλοι.

F. 22. Ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν τὴν ΑΓΕ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τεμνέτωσαν τὸ Γ, τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ· λέγω, ὅτι ἐφάψονται ἀλλήλων οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλοι.

Ἔστωσαν γὰρ αὐτῶν κοιναὶ τομαί, τοῦ μὲν ΑΓΕ καὶ τοῦ ΑΒΓ ἡ ΑΓ, τοῦ δὲ ΑΓΕ καὶ τοῦ ΓΔΕ ἡ ΓΕ, τοῦ δὲ ΑΒΓ καὶ τοῦ ΓΔΕ ἡ ΗΓΖ. (b)

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΓΕ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΑΒΓ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΕ διάμετρός ἐστι τοῦ ΓΔΕ κύκλου. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΓΕ ὀρθός ἐστι πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων, καὶ ἑκάτερος τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΑΓΕ κύκλον, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομή ἐστιν ἄρα ὀρθὴ πρὸς τὸν ΑΓΕ

---

a) εἰσί. *P.* et *H.*
b) Sic *H.* ΓΖ *P.*

κύκλον. Κοινὴ δὲ αὐτῶν τομή ἐστιν ἡ ΖΓΗ, καὶ ἡ ΖΓΗ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΓΕ κύκλον· ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΓΕ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΕ, οὖσα ἐν τῷ τοῦ ΑΓΕ κύκλου ἐπιπέδῳ· ἡ ΖΗ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΓ, ΓΕ. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἀπ' ἄκρας τῇ διαμέτρῳ τῇ (a) ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΖΗ, ἡ ΖΗ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου κατὰ τό Γ σημεῖον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου ἐφάπτεται ἡ ΖΗ κατὰ τὸ Γ σημεῖον. Ἐν δὲ σφαίρᾳ κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, ὅταν ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἐφάπτηται· ἐφάπτεται (b) δὲ ἡ ΖΗ ἀμφοτέρων τῶν κύκλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· καὶ οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἄρα κύκλοι ἐφάψονται ἀλλήλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γραφόμενος καὶ διὰ τῆς συναφῆς αὐτῶν ἐλεύσεται.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ (c) ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν F. 23. ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου πόλος τὸ Κ σημεῖον, τοῦ δὲ ΓΔΕ κύκλου πόλος τὸ Ζ· λέγω, ὅτι ὁ διὰ τῶν Ζ, Κ πόλων μέγιστος κύκλος γραφόμενος διὰ τοῦ Γ σημείου ἥξει.

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ὁ ΖΒΚ. (d) Καὶ πόλῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΗΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΔΕ κύκλος τῷ ΒΗΘ κύκλῳ, περὶ γὰρ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσίν. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΒΗΘ περιφέρειαν μεγίστου τινὸς κύκλου τὴν ΖΒΚ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τὸ Β τέμνουσι, τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ, ἐφάψονται ἀλλήλων οἱ ΑΒΓ, ΒΗΘ κύκλοι· ἀλλὰ καὶ τέμνουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ὁ διὰ τῶν Ζ, Κ πόλων μέγιστος κύκλος γραφόμενος οὐχ ἥξει καὶ διὰ τοῦ Γ σημείου· ὁ ἄρα διὰ τῶν πόλων τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ (e) κύκλων μέγιστος κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῆς συναφῆς τῶν κύκλων.

---

a) τῆς διαμέτρου τῆς *P.* et *H.* Auctor mihi fuit Euclides El. III, 16.
b) ἅπτεται *P.* et *H.* Cfr. Camerer ad Eucl. III, Def. 2.
c) ὁ *P.* et *H.*
d) ἔστω ὁ ΖΒΚ. *P.* et *H.* Cfr. II, 5. 15. III, 4.
e) τῶν πόλων ΑΒΓ, ΓΔΕ. *P.* et *H.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν τοῦ ἑνὸς πόλων καὶ τῆς συναφῆς μέγιστος κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν τοῦ ἑτέρου πόλων.

F. 24. Ἐν σφαίρᾳ γὰρ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου πόλος τὸ Ζ σημεῖον, τοῦ δὲ ΓΔΕ κύκλου πόλος τὸ Η σημεῖον· λέγω, ὅτι ὁ διὰ τῶν Ζ, Γ σημείων μέγιστος κύκλος γραφόμενος καὶ διὰ τοῦ Η σημείου ἐλεύσεται.

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατὸν, ἐρχέσθω ὡς ὁ ΖΓΘ, καὶ γεγράφθω διὰ τῶν Ζ, Η πόλων μέγιστος κύκλος ὁ ΖΗ· ἥξει δὴ διὰ τοῦ Γ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ.

Καὶ ἐπεὶ μέγιστός ἐστιν ἑκάτερος τῶν ΖΓΗ, ΖΓΘ, δίχα ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλους, ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΚΓ, ΖΛΓ ἡμικύκλιόν ἐστιν· ἡ ΖΓ ἄρα διάμετρός ἐστι τῆς σφαίρας, ἐπεὶ καὶ τῶν μεγίστων κύκλων τῶν ΖΓΗ, ΖΓΘ· ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ πόλου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ὁ διὰ τῶν Ζ, Γ σημείων μέγιστος κύκλος γραφόμενος οὐχ ἥξει καὶ διὰ τοῦ Η σημείου· διὰ τοῦ Η σημείου ἄρα ἥξει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἐφάψεται καὶ ἑτέρου ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῷ.

F. 25. Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλου τινὸς τοῦ ΓΔ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι ὁ ΑΒΓ κύκλος ἐφάψεται καὶ ἑτέρου κύκλου ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ ΓΔ κύκλῳ.

Εἰλήφθω ὁ πόλος τοῦ ΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε σημεῖον· καὶ γεγράφθω διὰ τῶν Γ, Ε σημείων μέγιστος κύκλος ὁ ΓΕΔΒΖΗ, καὶ ἀπειλήφθω τῇ ΓΕ περιφερείᾳ ἴση ἡ ΒΖ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔ ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἑνὸς πόλων τοῦ Ε καὶ τῆς ἀφῆς μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΓΕΔΒΖΗ· ὁ ΓΕΔΒΖΗ ἄρα ἥξει διὰ τῶν τοῦ ΑΒΓ πόλων. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΒΗ μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν τὴν ΓΗ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνουσι τὸ Β, τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ, ἐφάψονται ἄρα ἀλλήλων

οἱ ΑΒΓ, ΒΗ κύκλοι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ περιφέρεια τῇ ΒΖ περιφερείᾳ, κοινὴ προςκείσθω ἡ ΕΒ, ὅλη ἄρα ἡ ΓΒ ὅλῃ τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση. Ἡμικυκλίου δέ ἐστιν ἡ ΓΒ, ἡμικυκλίου ἄρα καὶ ἡ ΕΖ· τὸ Ε ἄρα κατὰ διάμετρόν ἐστι τῷ Ζ. Καί ἐστι τὸ Ε σημεῖον πόλος τοῦ ΓΔ κύκλου, καὶ τὸ Ζ ἄρα ὁ ἕτερος πόλος ἐστὶ τοῦ ΓΔ κύκλου. Πάλιν ἐπεὶ ἡ ΕΖ ἡμικυκλίου ἐστὶ, καί ἐστι τὸ Ζ πόλος τοῦ ΒΗ κύκλου, καὶ τὸ Ε ἄρα ὁ ἕτερος πόλος ἐστὶ τοῦ ΒΗ κύκλου. Οἱ ΓΔ, ΒΗ ἄρα κύκλοι περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους ὄντες παράλληλοί εἰσι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΔ τῷ ΒΗ κύκλῳ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΒΖ, ἴσος ἄρα καὶ ὁ ΓΔ κύκλος τῷ ΒΗ κύκλῳ, ἀλλὰ καὶ παράλληλος· ὁ ΑΒΓ ἄρα κύκλος ἐφάπτεται καὶ τοῦ ἑτέρου κύκλου τοῦ ΒΗ ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ δύο ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι, ὁ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν μέγιστος κύκλος ἐφαπτόμενος ἐφάψεται καὶ τοῦ ἑτέρου.

Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ δύο ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι ὁ τοῦ ΑΒ μέγιστος κύκλος ἐφαπτόμενος ἐφάψεται καὶ τοῦ ΓΔ. F. 26.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐφαπτέσθω μὲν τοῦ ΑΒ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕ κατὰ τὸ Α σημεῖον, τοῦ δὲ ΓΔ μὴ ἐφαπτέσθω.

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ ΑΒ ἐφάπτεται, ἐφάψεται ἄρα καὶ ἑτέρου ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ ΑΒ· ἐφαπτέσθω οὖν τοῦ ΕΖ.

Ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΒ τῷ ΕΖ ἴσος ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ὁ ΑΒ καὶ τῷ ΓΔ ἴσος ἐστὶ καὶ παράλληλος· καὶ ὁ ΓΔ ἄρα τῷ ΕΖ ἴσος ἐστὶ καὶ παράλληλος. Ἔσονται ἄρα ἐν σφαίρᾳ τρεῖς κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ὁ τοῦ ΑΒ μέγιστος κύκλος ἐφαπτόμενος οὐκ ἐφάψεται καὶ τοῦ ΓΔ, ἐφάψεται ἄρα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος πρός τινα κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ λοξὸς ᾖ, ἐφάψεται δύο κύκλων ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ πρός τινα κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΒΔ λοξὸς ἔστω, τουτ' ἔστι, μὴ ἔστω διὰ τῶν F. 27.

πόλων· λέγω, ὅτι ὁ ΑΒΓ κύκλος ἐφάψεται δύο κύκλων ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῷ προειρημένῳ τῷ ΒΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒΓ κύκλος λοξός ἐστι πρὸς τὸν ΒΔ, ὁ πόλος τοῦ ΒΔ οὐκ ἔστιν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Εἰλήφθω οὖν ὁ πόλος τοῦ ΒΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου καὶ ἑνὸς τῶν τοῦ ΑΒΓ κύκλου πόλων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΓΗ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΑΕ γεγράφθω ὁ ΑΖ.

Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΖ τῷ ΒΔ, περὶ γὰρ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΖ μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνουσι τὸ Α, τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ᾽ αὐτοῦ, ἐφάψονται ἀλλήλων· ὁ ἄρα ΑΒΓ κύκλος τοῦ ΑΖ κύκλου ἐφάψεται. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ ΑΖ ἐφάπτεται, ἐφάψεται ἄρα καὶ ἑτέρου ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ ΑΖ· ἐφαπτέσθω οὖν τοῦ ΓΗ. Ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΖ τῷ ΓΗ ἴσος τέ ἐστι καὶ παράλληλος, ἀλλ᾽ ὁ ΑΖ τῷ ΒΔ ἐστὶ παράλληλος, καὶ ὁ ΓΗ ἄρα τῷ ΒΔ ἐστὶ παράλληλος· ὁ ΑΒΓ ἄρα κύκλος ἐφάψεται δύο κύκλων τῶν ΑΖ, ΓΗ, ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῷ ΒΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ͽʹ. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γραφῇ· δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα(a) τμήματα τῶν κύκλων.

F. 28. Ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΖΑΕΒ, ΖΔΕΓ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΒΔ· λέγω, ὅτι ὁ ΑΓΒΔ κύκλος δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων, τοῦτ᾽ ἔστιν, ὅτι ἡ μὲν ΖΑ περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΑΕ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΖΒ περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΒΕ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΖΓ τῇ ΓΕ, καὶ ἡ ΖΔ τῇ ΔΕ.

Ἔστω γὰρ τοῦ μὲν ΑΓΒΔ κύκλου καὶ τοῦ ΖΑΕΒ κοινὴ τομὴ ἡ ΑΒ, τοῦ δὲ ΑΓΒΔ καὶ τοῦ ΖΓΕΔ κοινὴ τομὴ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΗ, ΗΕ.

Καὶ ἐπεὶ τὰ Ζ, Η, Ε σημεῖα ἐν τῷ τοῦ ΑΕΒΖ κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶν,(b) ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ τοῦ ΖΔΕΓ κύκλου ἐπιπέδῳ· τὰ Ζ, Η, Ε ἄρα σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστι(c) τῶν δύο ἐπιπέ-

a) τέμνει τὰ ἀπειλημμένα *D.* τεμεῖ ἀπειλημμένα *P.* et *H.*
b) εἰσίν· *P.* et *H.*
c) εἰσὶ *P.* et *H.*

δων. Πάντως δὲ δύο ἐπιπέδων ἡ κοινὴ τομὴ εὐθεῖά ἐστιν, ἐπ' εὐθεῖαν ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΓΒΔ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΖΑΕΒ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ἡ ΑΒ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΖΑΕΒ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ διάμετρός ἐστι τοῦ ΖΔΕΓ κύκλου. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΓΒΔ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς ἑκάτερον τῶν ΖΑΕΒ, ΖΔΕΓ κύκλων, καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν ΖΑΕΒ, ΖΔΕΓ ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΑΓΒΔ κύκλον. Ἐὰν δὲ δύο ἐπίπεδα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ ἐπιπέδῳ· καὶ ἡ κοινὴ ἄρα τομὴ τῶν ΖΑΕΒ, ΖΔΕΓ τῷ ΑΓΒΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. Κοινὴ δὲ αὐτῶν τομή ἐστιν ἡ ΖΗΕ, καὶ ἡ ΖΗΕ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΓΒΔ κύκλον, ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΓΒΔ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ τῆς ΖΗΕ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ, οὖσα ἐν τῷ τοῦ ΑΓΒΔ κύκλου ἐπιπέδῳ· ἡ ΖΗΕ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΒ, ΓΔ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΖΗΕ. Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ΖΑΕΒ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΑΒ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν τὴν ΖΗΕ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. Κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΑ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΑΕ περιφερείᾳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΖΒ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶν, ἡ δὲ ΖΓ τῇ ΓΕ, καὶ ἔτι ἡ ΖΔ τῇ ΔΕ· ὁ ΑΓΒΔ ἄρα κύκλος δίχα τέμνει τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι΄. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων ὅμοιαί εἰσιν, αἱ δὲ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων ἴσαι εἰσίν. (a)

Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, F. 29.
διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΑΕΗΓ, ΒΖΘΔ· λέγω, ὅτι αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων, ὅμοιαί εἰσι, τοῦτ' ἔστιν, ὅτι ἡ μὲν

---

a) Sic *D.* εἰσί. *P.* et *H.*

ΒΓ περιφέρεια ὁμοία ἐστὶ τῇ ΖΗ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΗΘ, ἡ δὲ ΔΑ τῇ ΘΕ, καὶ ἔτι ἡ ΑΒ τῇ ΕΖ· αἱ δὲ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων ἴσαι εἰσί· τοῦτ' ἔστιν, ὅτι αἱ τέσσαρες αἱ ΖΒ, ΗΓ, ΘΔ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω γὰρ τοῦ μὲν ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τοῦ ΒΖΘΔ κοινὴ τομὴ ἡ ΒΔ, τοῦ δὲ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τοῦ ΑΕΗΓ κοινὴ τομὴ ἡ ΑΓ, τοῦ δὲ ΕΖΗΘ κύκλου καὶ τοῦ ΖΚΘ κοινὴ τομὴ ἡ ΖΘ, τοῦ δὲ ΕΖΗΘ καὶ τοῦ ΕΚΗ κοινὴ τομὴ ἡ ΕΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕΗΓ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΑΒΓΔ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ἡ ΑΓ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΔ διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· τὸ Λ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Πάλιν ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕΗΓ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΕΖΗΘ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ἡ ΕΗ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΘ διάμετρός ἐστι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· τὸ Μ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ὑπό τινος ἐπιπέδου τέμνεται τοῦ ΒΖΘΔ, αἱ κοιναὶ ἄρα αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΖΘ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΕΗ παράλληλός ἐστιν. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΛ, ΛΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΖΜ, ΜΗ εἰσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΜΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΛΓ γωνίᾳ. Καί εἰσι πρὸς τοῖς κέντροις, καὶ βέβηκεν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΜΗ γωνία ἐπὶ τῆς ΖΗ περιφερείας, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΛΓ γωνία ἐπὶ τῆς ΒΓ περιφερείας· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΖΗ περιφερείᾳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΓΔ περιφέρεια ὁμοία ἐστὶ τῇ ΗΘ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΕΘ, καὶ ἔτι ἡ ΑΒ τῇ ΕΖ. Αἱ ἄρα τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων, ὅμοιαί εἰσι.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ αἱ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων, ἴσαι εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Κ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Πάλιν ἐπεὶ τὸ Κ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· λοιπαὶ ἄρα αἱ τέσσαρες αἱ ΕΑ, ΖΒ, ΗΓ, ΘΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ ἄρα τῶν μεγίστων

κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιαʹ. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν ἴσοις κύκλοις ἐπὶ διαμέτρων ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐπισταθῇ, ἀπὸ δὲ αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσι πρὸς τοῖς πέρασι τῶν τμημάτων, ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὖσαι τῶν ὅλων, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων σημείων πρὸς τὰς τῶν ἐξ ἀρχῆς κύκλων περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι προσβληθῶσιν· ἴσας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν ἐξ ἀρχῆς κύκλων πρὸς τοῖς πέρασι τῶν διαμέτρων.

Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ διαμέτρων τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφεστάτω τὰ ΑΗΓ, ΔΘΖ, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν πρὸς τοῖς πέρασι τοῖς Α, Δ σημείοις, αἱ ΑΗ, ΔΘ, ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὖσαι τῶν ὅλων τῶν ΑΗΓ, ΔΘΖ, καὶ ἀπὸ τῶν Η, Θ σημείων πρὸς τὰς τῶν ἐξ ἀρχῆς κύκλων τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι προςβεβλήσθωσαν αἱ ΗΒ, ΘΕ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ. F. 30.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Η, Θ σημείων ἐπὶ τὰ τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς, τοῦτ' ἔστιν, ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΖ. Πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ ΗΚ, ΘΛ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων, καὶ ἔστω τὰ Μ, Ν σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΒΜ, ΛΕ, ΕΝ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΗΚ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΚΒ οὖσα ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΚΒ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΘΛΕ γωνία ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ δύο τμήματα τὰ ΑΗΓ, ΔΘΖ ἴσα ἐστὶ, καὶ ἀπειλημμέναι ἴσαι εἰσὶ περιφέρειαι αἱ ΑΗ, ΔΘ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΗΚ, ΘΛ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΚ τῇ ΔΛ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΘΛ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΘΕ, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΗΚ, ΚΒ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΘΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΛ, ΛΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΗΚ, ΚΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΛ, ΛΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΒ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΕ ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΒ τῇ

ΛΕ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΔΝ, ὧν ἡ ΑΚ τῇ ΔΛ ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΜ λοιπῇ τῇ (a) ΛΝ ἐστιν ἴση· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΜ τῇ ΝΕ, δύο δὴ αἱ ΚΜ, ΜΒ δυσὶ ταῖς ΛΝ, ΝΕ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΚΒ βάσει τῇ ΛΕ ἐστιν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΜΒ τῇ ὑπὸ ΛΝΕ ἐστιν ἴση. Ἐν δὲ τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβʹ. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν ἴσοις κύκλοις ἐπὶ διαμέτρων ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐπισταθῇ, ἀπὸ δὲ αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσι πρὸς τοῖς πέρασιν, ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὖσαι τῶν ὅλων τμημάτων· ἀπὸ δὲ τῶν κύκλων ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πρὸς τοῖς πέρασι τῶν διαμέτρων· αἱ ἐπὶ τὰ γινόμενα σημεῖα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις.

F. 30. Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ διαμέτρων τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφεστάτω τὰ ΑΗΓ, ΔΘΖ, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἴσαι ἀπειλήφθωσαν περιφέρειαι πρὸς (b) τοῖς πέρασι τῶν τμήματων αἱ ΑΗ, ΔΘ ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὖσαι τῶν ὅλων τμημάτων, ἀπὸ δὲ τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων ἀφηρήσθωσαν ἴσαι περιφέρειαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πρὸς τοῖς (c) πέρασι τῶν διαμέτρων αἱ ΑΒ, ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΒ, ΘΕ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΗΒ τῇ ΘΕ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Η, Θ σημείων ἐπὶ τὰ τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι αἱ ΗΚ, ΘΛ, πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς, τοῦτ᾽ ἔστιν, ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΖ, καὶ εἰλήφθωσαν τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω τὰ Μ, Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΒΜ, ΛΕ, ΕΝ.

---

a) τῇ λοιπῇ *P.* et *H.*

b) περιφέρειαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῖς *P.* et *H.* Haec verba sensu prorsus carent, quum extremitates utriusque diametri inter se distinguere nequeas, priusquam arcus illos aequales segmentorum positione constitueris. Petita sunt opinor verba ex loco deinceps sequenti, ubi legitime ponuntur. Hinc tollenda censui ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, et reponendam praepositionem πρὸς, quam inspecta iterum theorematis enunciatione desiderabis.

c) μέρη τοῖς *P.* et *H.*

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΝΕ γωνίᾳ. Καὶ ἐπεὶ δύο τμήματα κύκλων ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗΓ, ΔΘΖ, καὶ ἀπειλημμέναι εἰσὶν ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΑΗ, ΔΘ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΚΗ, ΘΛ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΚ τῇ ΔΛ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΘΛ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΜ τῇ ΔΝ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ΑΚ τῇ ΔΛ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΜ λοιπῇ τῇ ΛΝ ἴση ἐστίν· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΜ τῇ ΝΕ ἴση, δύο δὴ αἱ ΚΜ, ΜΒ δυσὶ ταῖς ΛΝ, ΝΕ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΝΕ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΚΒ βάσει τῇ ΛΕ ἐστιν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΗΚ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΚΒ, οὖσα ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΚΒ γωνία. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΘΛΕ γωνία ὀρθή ἐστιν. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΗΚ τῇ ΘΛ, ἡ δὲ ΚΒ τῇ ΛΕ, δύο δὴ αἱ ΗΚ, ΚΒ δυσὶ ταῖς ΘΛ, ΛΕ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ὀρθὰς περιέχουσι γωνίας· βάσις ἄρα ἡ ΗΒ βάσει τῇ ΘΕ ἐστιν ἴση.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγʹ. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, καὶ γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι, ἑνὸς μὲν αὐτῶν ἐφαπτόμενοι, τοὺς δὲ λοιποὺς τέμνοντες· αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ἡμικυκλίων τῶν μεγίστων κύκλων, ὅμοιαί εἰσιν, αἱ δὲ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων, ἴσαι εἰσίν.

Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, ΚΛ, καὶ γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΕΚΗΓΦΤ, ΒΖΛΘΔΤΥ, ἑνὸς μὲν αὐτῶν τοῦ ΚΛ ἐφαπτόμενοι κατὰ τὰ Κ, Λ σημεῖα, τοὺς δὲ λοιποὺς τέμνοντες· λέγω, ὅτι αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ἡμικυκλίων τῶν μεγίστων κύκλων, ὅμοιαί εἰσι. F. 31.

Τίνες δέ εἰσιν αἱ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ἡμικυκλίων, γνωσόμεθα οὕτως.

Ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλους, ἡ ἄρα ΣΚΑΤ ἡμικυκλίου ἐστὶ περιφέρεια· ἡ ΚΑΤ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡμικυκλίου. Πάλιν ἐπεὶ ἡ ΤΦΓΣ ἡμικυκλίου ἐστὶ περιφέρεια, ἡ ἄρα

ΚΣΗΓΦΤ μείζων ἐστὶν ἡμικυκλίου· ἀλλὰ μὲν καὶ ἡ ΚΑΤ ἐλάσσων ἐστὶν ἡμικυκλίου, ἔστω οὖν ἡμικυκλίου ἡ ΚΑΤΦ. Πάλιν ἐπεὶ ἡ ΣΒΥΤ ἡμικυκλίου ἐστὶ περιφέρεια, ἡ ἄρα ΛΣΒΤ μείζων ἐστὶν ἡμικυκλίου· κείσθω οὖν ἡμικυκλίου ἡ ΛΣΒΥ, τὸ ἄρα ἀπὸ τοῦ Κ ἡμικύκλιον, τοῦτ' ἔστι, τὸ ΚΑΤΦ ἀσύμπτωτόν ἐστι τῷ ἀπὸ τοῦ Λ ἡμικυκλίῳ, τοῦτ' ἔστι τῷ ΛΣΒΥ. Ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ΚΣΗΓΦ ἡμικύκλιον ἀσύμπτωτόν ἐστι τῷ ΛΔΤΥ ἡμικυκλίῳ· αἱ ἄρα μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ἡμικυκλίων τῶν μεγίστων κύκλων οὖσαι τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι αἱ ΚΡΛ, ΕΞΖ, ΑΝΒ, ΗΟΘ, ΓΠΔ περιφέρειαί εἰσι. Λέγω δή, ὅτι αἱ μὲν ΚΡΔ, ΕΞΖ, ΑΝΒ ὅμοιαί εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ΚΡΛ, ΗΟΘ, ΓΠΔ ὅμοιαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ δὲ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων, ἴσαι εἰσίν, τοῦτ' ἔστιν, ὅτι αἱ μὲν τέσσαρες αἱ ΕΚ, ΚΗ, ΖΛ, ΛΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ δὲ τέσσαρες αἱ ΑΕ, ΒΖ, ΗΓ, ΘΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων κύκλων, καὶ ἔστω τὸ Μ σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Μ καὶ ἑκατέρου τῶν Κ, Λ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ(a) ΜΚΞΝ, ΜΛΟΠ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΕΚΗΓΦ, ΚΛ ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ Κ σημεῖον, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἑνὸς πόλων τοῦ ΚΛ καὶ τῆς ἁφῆς μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΜΚΞΝ· ὁ ΜΚΞΝ ἄρα κύκλος καὶ διὰ τῶν τοῦ ΑΕΚΗΓΦ ἥξει πόλων, καὶ ἔσται ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὁ ΜΛΟΠ ἥξει καὶ διὰ τῶν τοῦ ΒΖΛΘΔΤ πόλων, καὶ ἔσται ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. Καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΕΚΗΓΤ, ΒΖΛΘΔΤ ἐπὶ διαμέτρων ἴσα καὶ ὀρθὰ ἐν τοῖς Κ, Λ σημείοις τμήματα κύκλου ἐφίσταται, τὰ ΚΜ, ΛΜ καὶ τὰ τούτοις συνεχῆ, ἀπὸ δὲ αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΚΜ, ΜΛ, ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὖσαι τῶν ὅλων, καί ἐστιν ἡ ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση τῇ ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ· ἴσας ἄρα περιφερείας ἀπολήψονται, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΚ περιφέρεια τῇ ΛΔ περιφερείᾳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΛΘ ἔσται ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΑΕΚΗΓΤ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτων μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΜΚΞΝ, ὁ ΜΚΞΝ ἄρα δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕΚ περιφέρεια τῇ ΚΗΓ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΑΝ τῇ ΝΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΒΛ τῇ ΛΔ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΒΠ τῇ ΠΔ.

a) ὁ *P.* et *H.*

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕΚ περιφέρεια τῇ ΛΘΔ περιφερείᾳ, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΕΚ περιφερείας διπλῆ ἡ ΑΕΚΗΓ περιφέρεια, τῆς δὲ ΛΘΔ περιφερείας διπλῆ ἡ ΒΖΛΘΔ· καὶ ἡ ΑΕΚΗΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ΒΖΛΘΔ. Καί εἰσιν ἴσοι οἱ κύκλοι, μέγιστοι γάρ εἰσιν· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΑΒΓ περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΔΓΒ περιφερείᾳ. Καί ἐστι τῆς μὲν ΑΒΓ περιφερείας ἡμίσεια ἡ ΑΝ, τῆς δὲ ΒΓΔ ἡμίσεια ἡ ΒΠ· καὶ ἡ ΑΝ ἄρα τῇ ΠΒ ἴση ἐστί. Κοινὴ προςκείσθω ἡ ΝΒ, ὅλη ἄρα ἡ ΑΝΒ ὅλῃ τῇ ΝΒΠ ἐστὶν ἴση· καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΝΒ περιφέρεια τῇ ΝΒΠ περιφερείᾳ. Ἀλλ' ἡ ΝΒΠ τῇ ΚΛ ἐστὶν (a) ὁμοία, ἐὰν γὰρ ὦσιν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, αἱ τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων, ὅμοιαί εἰσι. Καί εἰσιν αἱ ΚΛ, ΝΒΓΠ περιφέρειαι τῶν παραλλήλων κύκλων, μεταξὺ οὖσαι τῶν μεγίστων τῶν ΜΝ, ΜΠ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν ὄντων· καὶ ἡ ΑΝΒ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ὁμοία. Ὁμοίως δὴ δείξομεν (b), ὅτι καὶ ἡ ΕΞΖ τῇ ΚΛ ἐστὶν ὁμοία, καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΕΖ ὁμοία ἐστί. Καὶ ἔτι ὁμοίως δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΠΔ τῇ ΗΟΘ ἐστιν ὁμοία· αἱ ἄρα τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ἡμικυκλίων τῶν μεγίστων κύκλων, ὅμοιαί εἰσι.

Λέγω δή, ὅτι καὶ αἱ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων, ἴσαι εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ τέσσαρες αἱ ΑΕΚ, ΚΗΓ, ΒΖΛ, ΛΘΔ περιφέρειαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὧν αἱ τέσσαρες αἱ ΕΚ, ΚΗ, ΖΛ, ΛΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· [ὁμοίως γὰρ οἱ ΚΝ, ΛΠ μέγιστοι κύκλοι ὄντες δίχα τέμνουσι τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τὰ ΕΚΗ, ΕΞΗ, καὶ τὰ ΖΛΘ, ΖΟΘ, ὥςτε ἴση ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΚΗ, ἀλλ' ἡ ΕΚ τῇ ΛΘ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ ΛΘ ἐστιν ἴση, ἀλλ' ἡ ΘΛ τῇ ΛΖ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ΛΖ ἄρα τῇ ΚΗ ἐστιν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΚ, ΚΗ, ΖΛ, ΛΘ ἴσαι εἰσί· λοιπαὶ ἄρα αἱ τέσσαρες αἱ ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΘΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. (c)] Αἱ ἄρα τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι, αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων, ἴσαι εἰσίν.

---

a) ἐστὶ *P.* et *H.*
b) Ὁμοίως δείξομεν *P.* et *H.*
c) Uncis inclusa glossam redolent. Attamen toleranda sunt, donec auctoritas codicum abire verba ea coëgerit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδʹ. ΠΡΟΒΛ. (a)

Κύκλου δοθέντος ἐν σφαίρᾳ ἐλάττονος τοῦ μεγίστου, καὶ σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ, γράψαι διὰ τοῦ σημείου μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ δοθέντος.

F. 32. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ἐν σφαίρᾳ ὁ ΑΒ, ἐλάσσων ὢν τοῦ μεγίστου, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἔστω τὸ Β· δεῖ δὴ διὰ τοῦ Β σημείου γράψαι μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ ΑΒ κύκλου.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ πόλος τοῦ ΑΒ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Γ· (b) καὶ διὰ τῶν Γ, Β σημείων μεγίστου κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΓΒΔ, καὶ τῇ, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, ἴση ἀπειλήφθω ἡ ΔΒ. Οὐ γὰρ δυνατὸν, τὴν ΒΓ εἶναι τεταρτημόριον, ἔσται γὰρ μέγιστος ὁ ΑΒ, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ ΓΒ τεταρτημόριον· (c) καὶ πόλῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΒΖ, μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΕΒΖ, ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒ, ΕΒΖ, μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν τὴν (d) ΒΓΔ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τὸ Β τέμνουσι, τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ, ἐφάψονται ἀλλήλων οἱ κύκλοι· ἐφάψεται ἄρα ὁ ΑΒ κύκλος τοῦ ΕΒΖ κύκλου. Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Β γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ ΕΒΖ ἐφαπτόμενος τοῦ ΑΒ κύκλου κατὰ τὸ Β σημεῖον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιεʹ. ΠΡΟΒΛ. (e)

Κύκλου δοθέντος ἐν σφαίρᾳ ἐλάσσονος τοῦ μεγίστου, καὶ σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὅ ἐστι μεταξὺ αὐτοῦ τε καὶ τοῦ ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῷ, γράψαι διὰ τοῦ σημείου μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ δοθέντος κύκλου.

---

a) Sic *D.* ΘΕΩΡΗΜΑ. *P.* et *H.*
b) ἔστω Γ· *P.* et *H.* Fortasse legendum ἔστω τὸ Γ σημεῖον.
c) τεταρτημορίου. *P.* et *H.*
d) τοῦ *P.* et *H.* Sed vide II, 3.
e) Sic *D.* ΘΕΩΡΗΜΑ. *P.* et *H.*

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἐν σφαίρᾳ ἐλάσσων τοῦ μεγίστου ὁ ΑΒ, τὸ δὲ F. 33.
δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὅ ἐστι μεταξὺ αὐτοῦ τε τοῦ ΑΒ, καὶ τοῦ ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῷ, ἔστω τὸ Γ· δεῖ δὴ διὰ τοῦ Γ σημείου γράψαι μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ ΑΒ κύκλου.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ πόλος τοῦ ΑΒ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ σημεῖον· καὶ πόλῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΕΖΗ, καὶ διὰ τῶν Δ, Γ σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΓΘ, καὶ τῇ, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, ἴση περιφέρεια ἀπειλήφθω ἡ ΒΘ· καὶ πόλῳ μὲν τῷ Θ, διαστήματι δὲ τῷ ΒΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΒΗ· μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΕΒΗ κύκλος, ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. Καὶ ἐφάψεται τοῦ ΑΒ· δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΕΒΗ, ΑΒ (a) μεγίστου κύκλου περιφέρειαν τὴν ΔΒΓΘ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνουσι τὸ Β, τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ. Καὶ διὰ τοῦ Δ σημείου καὶ ἑκατέρου τῶν Ε, Η σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΔΜΕΚ, ΔΝΗΛ, καὶ τῇ ΓΘ περιφερείᾳ ἴση ἀπειλήφθω ἑκατέρα τῶν ΕΚ, ΗΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΕΒΗ, ΖΕΓΗ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΔΒΓΘ, δίχα ἄρα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΓ περιφέρεια τῇ ΓΗ, ἡ δὲ ΕΒ περιφέρεια τῇ ΒΗ περιφερείᾳ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΔΕ, ΔΓ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐκ γὰρ τοῦ πόλου εἰσὶ τοῦ ΖΕΗ κύκλου, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ΔΜ, ΔΒ, ΔΝ ἴσαι ἀλλήλαις, ἀλλὰ καὶ αἱ ΕΚ, ΓΘ, ΗΛ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὅλαι ἄρα αἱ ΜΚ, ΒΘ, ΝΛ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί (b). Καί ἐστιν ἡ ΒΘ ἴση τῇ, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· καὶ αἱ ΜΚ, ΝΛ ἄρα ἴσαι εἰσὶ τῇ, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΔΒΓΘ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΖΕΓΗ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὁ ΔΒΓΘ ἄρα ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΖΕΓΗ κύκλον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὁ ΔΝΗΛ ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΖΕΓΗ, καὶ ἔτι ὁ ΔΜΕΚ ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΖΕΓΗ.

---

a) κύκλοι ΕΒΗ, ΑΒ *P.* et *H.*
b) εἰσίν. *P.* et *H.*

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΝ, ΛΓ, ΘΕ. Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΖΕΓΗ ἐπὶ διαμέτρων τῶν ἀπὸ τῶν Γ, Η σημείων ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφίσταται τὰ ΓΘ, ΗΛ καὶ τὰ τούτοις συνεχῆ, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΓΘ, ΗΛ, ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὖσαι τῶν ὅλων, καί ἐστιν ἴση ἡ ΕΓ περιφέρεια τῇ ΓΗ περιφερείᾳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ τῇ ΛΓ. Τετραγώνου δὲ ἡ ΘΕ, καὶ ἡ ΛΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΝ τετραγώνου πλευρὰ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΛ τῇ ΛΝ. Ὁ ἄρα πόλῳ μὲν τῷ Λ, διαστήματι δὲ τῷ ΛΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ν σημείου. Ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ὁ ΓΝΞ, μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΝΞ, ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΓΝΞ, ΑΒ (a) μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν τὴν ΔΝΗΛ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνουσι τὸ Ν, τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ, ἐφάψονται ἄρα ἀλλήλων ὁ ΓΝΞ ἄρα τοῦ ΑΒ κύκλου ἐφάψεται.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὁ πόλῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Μ σημείου. Ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΓΚ, ΘΗ, ἔσονται ἴσαι ἀλλήλαις· καί ἐστιν ἡ ΘΗ τετραγώνου πλευρὰ, ἐκ γὰρ τοῦ πόλου ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ΕΒΗ, καὶ ἡ ΚΓ ἄρα τετραγώνου ἔσται πλευρά· ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΜ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΚΜ. Ὁ ἄρα πόλῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Μ σημείου, καὶ ἔσται ὡς ὁ ΓΜΟ, καὶ ἐφάψεται τοῦ ΑΒ κύκλου· καὶ γίνεται διχῶς τὸ πρόβλημα. Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Γ (b), ὅ ἐστι μεταξὺ τοῦ ΑΒ κύκλου, καὶ τοῦ ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῷ, μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΓΝΞ, καὶ ὁ ΓΜΟ. [Ὁμοίως γὰρ ἐροῦμεν· ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΕΖΗΓ ἐπὶ διαμέτρων τῶν ἀπὸ Ε, Γ σημείων ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφέσταται τὰ ΕΚ, ΓΘ καὶ τὰ τούτοις συνεχῆ, καί ἐστιν ἴση ἡ ΕΓ περιφέρεια τῇ ΓΗ περιφερείᾳ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΚ εὐθεῖα τῇ ΘΗ εὐθείᾳ. Τετραγώνου δὲ ἡ ΘΗ, ἐκ πόλου γὰρ τοῦ ΕΒΗ κύκλου· τετραγώνου ἄρα καὶ ἡ ΓΚ, ἔτι δὲ καὶ ἡ ΚΜ τετραγώνου. Ὁ ἄρα πόλῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἑνὶ

---

a) κύκλοι ΓΝΞ, ΑΒ *P.* et *H.*
b) σημείου, Γ *P.* et *H.*

τῶν Γ, Μ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ λοιποῦ· καὶ φανερὸν, ὅτι ἐφάψεται τοῦ ΑΒ κύκλου.

Εἰ δέ τις λέγοι, τὴν ἀπολαμβανομένην ἴσην τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, εἶναι τὴν ΒΓ, δείξομεν οὕτως. F. 34.

Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΔΗ, ὧν ἡ ΔΒ ἴση ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΔΜ, ΔΝ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ ἴση ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΝΗ, ΕΜ. Τετραγώνου δὲ ἡ ΒΓ, τετραγώνου ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΝΗ, ΕΜ. Ἐπεὶ οὖν τετραγώνου ἐστὶν ἡ ΗΝ καὶ ἡ ΗΓ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΗ τῇ ΓΗ· ὁ ἄρα πόλῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΓΗ, γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τοῦ Ν σημείου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὁ πόλῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΕΓ, κύκλος γραφόμενος ἥξει διὰ τοῦ Μ σημείου. Καὶ ἔσται διχῶς τὸ πρόβλημα (a)].

---

a) Gravem nobis suspicionem movet propositionis pars novissima, ita ut eam abire e textu statim iuberemus, si codices quodammodo annuerent, quos quum inspiciendi copia facta non sit, in eo acquiescendum erit, ut rationibus ex ipsa re petitis verba haec omnia uncis inclusa spuria esse efficiamus. Referuntur autem hae rationes tum ad priorem partem Ὁμοίως γὰρ usque ad verba ὅτι ἐφάψεται τοῦ ΑΒ κύκλου, tum ad posteriorem a verbis Εἰ δέ τις λέγοι usque ad finem.

Etenim quod supplementi specie demonstratur, circulum quoque ΓΜΟ problema conficere, id iam praeoccupatum videmus inde a verbis Ὁμοίως δὴ δείξομεν, non tantum iterata demonstratione, qua facile supersedere possumus, rectas ΓΚ, ΘΗ esse aequales. Monstrosum profecto et alienum esset a more Theodosii, repetitam demonstrationem quasi mantissam adsuere, iterumque recoquere quum maxime exposita.

Sed fac voluisse Theodosium in eiusmodi supplemento repetere, quaecunque tandem rigor demonstrationis requireret, exspectares certe demonstrationem partibus suis expletam; nonnulli tamen loci sunt praetermissi: 1. Post verba καὶ τὰ τούτοις συνεχῆ res necessario postulat ea, quae supra disertis verbis addidit: καὶ ἀπ' αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι etc. cf. prop. 17. 2. Circulum ΓΜΟ esse maximum, nunc quoque omissum est, quamquam Theodosius probe demonstravit, circulum ΓΝΞ maximum esse. 3. Circulum ΓΜΟ contingere circulum ΑΒ, leviter absolvitur voculis καὶ φανερὸν etc., non hic, at supra sufficientibus.

Missis deinde repetitionibus invenimus superflua. Documento sunt verba ὁ ἄρα πόλῳ .... τοῦ λοιποῦ. Etenim non agitur, num circulus maximus per punctum Μ descriptus transeat per punctum Γ, sed num circulus per Γ legitime descriptus transeat per punctum Μ. Theodosius ipse supra nihil amplius pensi habet verbis ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ν (Μ) σημείου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ. ΘΕΩΡ.

Οἱ ὁμοίας ἀφαιροῦντες ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι παραλλήλων τινῶν κύκλων περιφερείας ἤτοι διὰ τῶν

Verba denique Ὁμοίως γὰρ ἐροῦμεν longe recedunt a solemnibus Theodosii formulis ὁμοίως δείξομεν, ὁμοιως δειχθήσεται.

His igitur momentis inclinor in eam sententiam, qua hanc priorem partem usque ad verba τοῦ ΑΒ κύκλου glossema credam nescio cuius leviter exercitati in pulvere geometrico, rectas ΓΚ, ΗΘ aequales esse sibi iterum demonstrantis et simul reliquam demonstrationem summatim adpingentis.

In iis, quae sequuntur, Εἰ δέ τις λέγοι rel. simili modo laboro. Accipe rationes. Veterum geometrarum esse constat, ubi propositio certis conditionibus discedat in casus plures, quos sibi omnes tractandos sumserint, aut enumerare hos singillatim in ipsa determinatione, aut ita certe demonstrationis decursu proponere, ut iam ex primo casu eluceat, restare unum alterumve. Nostrae tamen propositionis demonstratione ab initio ita comparata, ut plures existere casus ne verbo quidem significetur, a principio ut concessum sumere tacite cogimur, arcum ΒΓ quadrante circuitus minorem esse, deinde in locum nostrum delati monemur, arcum eundem quadranti etiam aequalem esse posse. Equidem id multum habet offensionis, sed finge credidisse Theodosium, opus esse monitu, arcum illum ΒΓ aequalem ambitus quadranti esse posse; ego vero magis miror, quod non addidit, fieri quoque posse, ut maior sit quadrante. Longe aliter esset, si geometra varios propositionis casus plane non vocasset in disquisitionem, sive iam ex uno disci posse omnes confisus esset, sive casuum diversitas ipsum fugisset. Cfr. II, 11. 12.

Animadvertimus praeterea dictionis quandam negligentiam non Theodosianam. Confunduntur enim arcus circuli cum chordis: sic loco verborum τὴν ἀπολαμβανομένην ἴσην τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ necessario debebat scripsisse τὴν ἀπολαμβανομένην ἴσην τῇ, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρά. Scilicet non intelligit chordam, quam credas, sed ipsam circumductae quadrantem.

Postremo in formam geometricam demonstrandae propositioni descriptam oculos coniicientes tria elementa unamque rectam lineam reperimus, quae ad demonstrationem plane non adhibentur, puta elementa Κ, Λ, Θ et rectam ΕΘ. Veruntamen diligentius intuentibus facile patescit, non praeter rem esse, sed spectare et elementa et rectam ad illum casum supra desideratum, quo arcus ΒΓ quadrante ambitus maior ponendus erat.

Quae quum ita sint, haec utraque statuenda esse censeo:

1. Exstitit utique quondam elaboratus tertius casus, sed perierunt quaecunque ad eum pertinuerunt usque ad ea vestigia, quae in forma geometrica agnoscuntur.

2. Attamen ipse Theodosius neque desideratum tertium, neque alte-

πόλων εἰσὶ τῶν παραλλήλων, ἢ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφάπτονται.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΗΓ, ΒΖΘΔ παραλλήλων F. 35.
τινῶν κύκλων τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ὁμοίας ἀφαιρείσθωσαν περιφερείας 36.
τὰς μεταξὺ αὐτῶν, τουτ' ἔστι, τὴν ΑΒ τῇ ΕΖ ὁμοίαν· λέγω, ὅτι οἱ 37.
ΑΗΓ, ΒΖΘΔ κύκλοι ἤτοι διὰ τῶν πόλων εἰσὶ τῶν παραλλήλων, ἢ τοῦ αὐτοῦ ἐφάπτονται τῶν παραλλήλων.

Ἤτοι γὰρ ὁ ΑΗΓ κύκλος διὰ τῶν πόλων ἐστὶ τῶν παραλλήλων, ἢ οὔ.

Ἔστω πρότερον διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων· λέγω, ὅτι καὶ ὁ ΒΘΔ κύκλος διὰ τῶν πόλων ἐστὶ τῶν παραλλήλων, τουτ' ἔστι, ὅτι τὸ Κ σημεῖον πόλος ἐστὶ τῶν παραλλήλων κύκλων τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ.

Μὴ γὰρ, ἀλλ', εἰ δυνατὸν, ἔστω τὸ Λ σημεῖον πόλος τῶν παραλλήλων, καὶ διὰ τῶν Λ, Ζ σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΛΖΜ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒΜ περιφέρεια τῇ ΕΖ. Ἀλλ' ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ ἐστιν ὁμοία, καὶ ἡ ΑΜ ἄρα τῇ ΑΒ ἐστιν ὁμοία, καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΜ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Λ σημεῖον πόλος ἐστὶ τῶν παραλλήλων. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο, πλὴν τὸ Κ σημεῖον· τὸ Κ ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τῶν παραλλήλων. Οἱ ἄρα ΑΗΓ, ΒΘΔ κύκλοι διὰ τῶν πόλων εἰσὶ τῶν παραλλήλων.

Δευτέρα καταγραφή (a).

Ἀλλὰ δὴ πάλιν μὴ ἔστω ὁ ΑΗΓ διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων. Ἤτοι δὴ ἐφάψεται τοῦ ΕΖΘ κύκλου, ἢ λοξὸς ἔσται πρὸς αὐτόν.

Ἐφαπτέσθω πρότερον κατὰ τὸ Ε, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας F. 36.
καταγραφῆς· λέγω, ὅτι καὶ ὁ ΖΒ ἐφάψεται.

rum casum ipse tractavit, sed alius quidam serioris aevi minus sollicite curans dictionis et subtilitatem et elegantiam.

Caeterum adnotatu dignum est, versionem Voegelini casus tres cunctos amplecti, ita tamen, ut iam inde ab initio de diversitate eorum monitum sit.

a) Figura ita delineata est apud *P.* et *H.*, ut arcus ΒΖΔ transeat per punctum Ε. Manifestus error; nam circuli maximi arcus ΒΖΔ per punctum contactus circulorum ΕΖΘ, ΑΕΓ transire non potest, quia amborum circulorum ΕΖΘ, ΑΒΓΔ similes arcus intercipi ponuntur inter circulos ΑΕΓ, ΒΖΔ. Igitur sequutus sum Arabem et recentiores.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, μὴ ἐφαπτέσθω, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Ζ σημείου, τοῦ ΕΖΘ ἐφαπτόμενος μέγιστος κύκλος (*a*) ὁ ΖΓ, ἀσύμπτωτον ποιῶν τὸ ἀπὸ τοῦ ΖΓ ἡμικύκλιον τῷ ἀπὸ τοῦ ΕΑ ἡμικυκλίῳ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερείᾳ. Ἀλλ᾽ ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ ἐστιν ὁμοία, καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ (*b*) ΑΒ ἐστιν ὁμοία· καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ὁ ΒΖ κύκλος τοῦ ΕΖΘ κύκλου οὐκ ἐφάψεται, ἐφάψεται ἄρα.

Τρίτη καταγραφή (*c*).

F. 37. Ἀλλὰ δὴ ὁ ΑΗΓ λοξὸς ἔστω πρὸς τοὺς παραλλήλους, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς· ἐφάψεται ἄρα δύο κύκλων ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τοῖς ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ· λέγω, ὅτι καὶ ὁ ΒΖΘΔ λοξός ἐστι πρὸς τοὺς παραλλήλους, καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐφάψεται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ὁ μὲν ΑΕΗΓ κύκλος ἐφαπτέσθω ἑνὸς τῶν παραλλήλων τοῦ ΜΞ κατὰ τὸ Λ σημεῖον, ὁ δὲ ΒΖΘΔ μὴ ἐφαπτέσθω· καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου, ὄντος μεταξὺ τοῦ τε ΛΜ κύκλου καὶ τοῦ ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῷ, μέγιστος κύκλος γεγράφθω, ἐφαπτόμενος τοῦ ΛΜ κατὰ τὸ Μ σημεῖον ὁ ΝΖΜ, ἀσύμπτωτον ποιῶν τὸ ἀπὸ τοῦ ΛΑ ἡμικύκλιον τῷ ἀπὸ τοῦ ΜΝ (*d*) ἡμικυκλίῳ.

Ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒΝ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερείᾳ· ἀλλ᾽ ἡ ΕΖ περιφέρεια τῇ ΑΒ ἐστιν ὁμοία, [καὶ ἡ ΑΒΝ ἄρα τῇ ΑΒ ἐστιν ὁμοία (*e*)], καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἡ ΝΑ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ὁ ΔΘΒ κύκλος οὐκ ἐφάψεται τοῦ ΛΜ κύκλου, ἐφάψεται ἄρα. Οἱ ΑΕΗΓ, ΒΖΘΔ ἄρα κύκλοι τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφάπτονται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ΄. ΘΕΩΡ.

Οἱ ἴσας ἀφαιροῦντες ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι μεγίστου τινὸς κύκλου περιφερείας, πρὸς τὸν μέγιστον

---

a) ἐφαπτόμενος κύκλος *P.* et *H.* Invenies eandem phrasin in hac ipsa propositione supra et infra.

b) ΓΑ τῇ *P.* et *H.*

c) *P.* et *H.* figuram ita exhibent, ut arcus ΝΜ non transeat per punctum Ζ, unde mira confusio nascitur. Restitui formam genuinam ex interpretatione arabica.

d) ΜΗΝ *P.* et *H.*

e) Quae uncis inclusa sunt, desiderabam in libris editis.

τῶν παραλλήλων, ἴσοι εἰσίν, οἱ δὲ μείζονας (a), ἐλάσσονες.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ περιφέρειαν τὴν ΒΖ, ἴσην τῇ ΓΖ περιφερείᾳ, ἀφαιρείσθωσαν πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ΕΖ· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΒ κύκλος τῷ ΓΔ κύκλῳ. F. 38.

Ἔστω γὰρ τοῦ μὲν ΑΒ κύκλου καὶ τοῦ ΑΒΓΔ κοινὴ τομὴ ἡ ΑΒ, τοῦ δὲ ΕΖ κύκλου καὶ τοῦ ΑΒΓΔ κοινὴ τομὴ ἡ ΕΖ, τοῦ δὲ ΓΔ καὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ ΓΔ.

Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΕΘΖ, ΓΚΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνεται τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, αἱ κοιναὶ ἄρα αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΕΖ παράλληλός ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο παράλληλοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΕΖ, ΓΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ περιφέρεια τῇ ΓΖ περιφερείᾳ. Ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΓ, ἔσονται αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι· ἐν δὲ τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ περιφέρεια τῇ ΖΓ περιφερείᾳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΒΖ τῇ ΑΕ ἴση ἐστίν· ἀλλ' ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ ἴση ἐστί, καὶ ἡ ΑΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἐστὶν ἴση, καὶ συναμφότεραι ἄρα αἱ ΑΕ, ΒΖ συναμφοτέραις ταῖς ΕΔ, ΖΓ ἴσαι εἰσίν. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΑΛΒΖ περιφέρεια ὅλη τῇ ΖΓΜΔΕ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, μέγιστοι γάρ εἰσι κύκλοι οἱ ΕΘΖ, ΑΒΓΔ, ὧν συναμφότεραι αἱ ΕΑ, ΖΒ συναμφοτέραις ταῖς ΕΔ, ΖΓ ἴσαι εἰσίν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛΒ λοιπῇ τῇ ΔΜΓ ἐστὶν ἴση, καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ εὐθεῖα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ.

Ἤτοι δὴ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοὺς ΑΗΒ, ΔΚΓ κύκλους διὰ τῶν πόλων τέμνει, ἢ οὔ.

Τεμνέτω πρότερον διὰ τῶν πόλων, καὶ δίχα ἄρα αὐτοὺς τεμεῖ· ἡ μὲν ΑΒ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΗΒ κύκλου, ἡ δὲ ΔΓ τοῦ ΔΚΓ κύκλου, καί ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἴση· ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ ΑΗΒ κύκλος τῷ ΓΚΔ κύκλῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν μὴ τεμνέτω ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοὺς ΑΗΒ, ΓΚΔ κύκλους διὰ τῶν πόλων· καὶ εἰλήφθω ὁ πόλος τῶν παραλλήλων, καὶ ἔστω τὸ Ν σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Ν σημείου καὶ ἑνὸς τῶν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου πόλων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΛΘΚΜΞ, καὶ τῇ ΛΝ περιφερείᾳ ἴση ἀπειλήφθω ἡ ΜΞ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΛΝ πε-

---

a) Sic *D.* et *H.* μείζονες *P.*

ριφέρεια τῇ ΜΞ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΝΚΜ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΛΗΜ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΝΚΜΞ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν. Ἡμικυκλίου δὲ ἡ ΛΚΜ, ἡμικυκλίου ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΝΗΜΞ· κατὰ διάμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Ν σημεῖον τῷ Ξ σημείῳ· καί ἐστι τὸ Ν ὁ πόλος τῶν παραλλήλων κύκλων· καὶ τὸ Ξ ἄρα σημεῖον ὁ ἕτερος πόλος ἐστὶ τῶν παραλλήλων κύκλων. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΔΚΓ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΛΘΚΞ· ὁ ΛΘΚΞ ἄρα δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ περιφέρεια τῇ ΜΔ περιφερείᾳ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜΔ (*a*) περιφέρεια τῆς ΜΓ περιφερείας. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΛΒ περιφέρεια τῆς ΑΛ περιφερείας διπλῆ ἐστι· καί ἐστιν ἴση ἡ ΔΜΓ περιφέρεια τῇ ΑΛΒ περιφερείᾳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΔ περιφέρεια τῇ ΑΛ περιφερείᾳ. Κύκλου δή τινος τοῦ ΑΒΓΔ ἐπὶ διαμέτρου, τῆς ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Μ, τμήματα κύκλου ὀρθὰ καὶ ἴσα ἐφέσταται τὸ ΛΘΚΜ, καὶ τὸ ΜΞ καὶ τὸ τούτῳ συνεχές· καὶ ἀπὸ τούτων ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΛΝ, ΜΞ, ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι (*b*) οὖσαι τῶν ὅλων, ἀπὸ δὲ τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΑΛ, ΜΓ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Ξ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ. Καὶ ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκ τοῦ πόλου ἐστὶ τοῦ ΑΗΒ κύκλου, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Ξ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκ τοῦ πόλου ἐστὶ τοῦ ΓΚΔ κύκλου· ἡ ἄρα ἐκ τοῦ πόλου τοῦ ΑΗΒ κύκλου ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ πόλου τοῦ ΔΚΓ κύκλου. Ὧν δὲ κύκλων αἱ ἐκ τῶν πόλων ἴσαι εἰσίν, ἴσοι εἰσὶν οἱ κύκλοι· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΗΒ κύκλος τῷ ΔΚΓ κύκλῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω μείζων ἡ ΓΖ περιφέρεια τῆς ΒΖ περιφερείας· λέγω, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΔΚΓ κύκλος τοῦ ΑΗΒ κύκλου.

F. 39. Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΓΖ περιφέρεια τῆς ΖΒ περιφερείας, ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΓΖ τῇ ΖΒ ἴση ἡ ΖΟ, καὶ διὰ τοῦ (*c*) Ο τῷ ΕΘΖ κύκλῳ παράλληλος γεγράφθω ὁ ΟΡΠ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΠΡΟ κύκλος τῷ ΑΗΒ κύκλῳ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΟΖ περιφέρεια τῇ ΖΒ περιφερείᾳ. Ὁ δὲ ΠΡΟ κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ ΔΚΓ κύκλου, ἔγγιον γὰρ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ὁ ΠΡΟ κύκλος, ἤπερ ὁ ΔΚΓ

---

a) ΓΔ *P.*
b) ἡμίσεαι *P.* et *H.*
c) τὸ *P.* et *H.*

κύκλος· καὶ ὁ ΑΗΒ ἄρα κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ ΔΚΓ κύκλου, ὥςτε ὁ ΔΚΓ κύκλος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ΑΗΒ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη΄. ΘΕΩΡ.

Ἐν σφαίρᾳ οἱ ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι μεγίστου τινὸς κύκλου πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων, οἱ δὲ μείζονες ἐλάττονας.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ περιφερείας τὰς ΒΖ, ΖΔ ἀφῃρήσθωσαν (a) πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ΕΖ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ περιφέρεια τῇ ΖΔ περιφερείᾳ. F. 40.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἡ ΒΖ περιφέρεια ἴση τῇ ΖΔ, οὐδὲ ἄρα ὁ ΑΒ κύκλος τῷ ΓΔ κύκλῳ ἴσος ἐστίν· ἔστι δέ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῇ ΖΔ.

Ἀλλὰ πάλιν ἔστω ὁ ΑΒ κύκλος μείζων τοῦ ΓΔ κύκλου· λέγω, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΖΔ περιφερείας.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἐλάσσων ἡ ΒΖ περιφέρεια τῆς ΖΔ περιφερείας, οὐκ ἄρα ὁ ΑΒ κύκλος τοῦ ΓΔ κύκλου μείζων ἐστίν· ἔστι δέ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ περιφέρεια τῆς ΖΔ περιφερείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ΄. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος παραλλήλους τινὰς κύκλους τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ διὰ τῶν πόλων τέμνῃ, εἰς ἄνισα αὐτοὺς τεμεῖ, χωρὶς τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων. Τῶν δὲ ἀπολαμβανομένων τμημάτων ἐν ἑνὶ τῶν ἡμισφαιρίων, ἡμικυκλίων μὲν ἔσται μείζονα, ὅσα ἐστὶ μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων καὶ τοῦ φανεροῦ πόλου· τὰ δὲ λοιπὰ ἐλάττονα, ὅσα ἐστὶ μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων καὶ τοῦ ἀφανοῦς πόλου. Τῶν δὲ ἴσων τε καὶ παραλλήλων κύκλων τὰ ἐναλλὰξ τμήματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν (b).

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ παραλλήλους τοὺς ΑΔ, ΕΖ, ΒΓ μὴ διὰ τῶν πόλων τεμνέτω, μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἔστω ὁ ΕΖ· λέγω, ὅτι εἰς ἄνισα αὐτοὺς τεμεῖ, χωρὶς τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ ΕΖ· τῶν δὲ ἀπολαμβανομένων τμημάτων ἐν ἑνὶ τῶν ἡμισφαιρίων, ἡμικυ- F. 41.

---

a) ἀφαιρήσθωσαν *P.* et *H.*
b) Sic *D.* εἰσίν. *P.* et *H.*

κλίων μὲν ἔσται μείζονα, ὅσα ἐστὶ μεταξὺ τοῦ τε ΕΖ καὶ τοῦ φανεροῦ πόλου, τὰ δὲ λοιπὰ ἐλάσσονα· τῶν δὲ ἴσων τε καὶ παραλλήλων κύκλων τὰ ἐναλλὰξ τμήματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω γὰρ ὁ φανερὸς πόλος τῶν παραλλήλων τὸ Η σημεῖον, καὶ διὰ τῶν Ε, Η μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΕΘ· ὁ ΗΕΘ ἄρα προςαναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου, κατὰ διάμετρον γὰρ τὸ Ε τῷ Ζ, διὰ τὸ μέγιστον εἶναι ἑκάτερον τῶν ΕΖ, ΑΒΓΔ. Ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΗΝΖΚ, καὶ προςαναπεπληρώσθω ὁ ΒΓ κύκλος ἕως τῶν Θ, Κ σημείων.

Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΘΕΜΗΝΖΚ κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς ΑΜΝΔ, ΕΖ, ΘΒΓΚ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν ΜΝ, ΕΖ, ΘΒΓΚ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ΜΝ ἡμικύκλιόν ἐστι, τὸ ΑΜΝΔ ἄρα μεῖζόν ἐστιν ἡμικυκλίου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πάντα τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τοῦ τε ΕΖ κύκλου καὶ τοῦ Η πόλου μείζονά ἐστιν ἡμικυκλίων.

Πάλιν ἐπεὶ τὸ ΘΒΓΚ ἡμικύκλιόν ἐστι, τὸ ΒΓ ἄρα ἔλασσόν ἐστιν ἡμικυκλίου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πάντα τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τοῦ τε ΕΖ κύκλου καὶ τοῦ ἀφανοῦς πόλου, καὶ ὄντα ἐν τῷ αὐτῷ ἡμισφαιρίῳ, ἐλάττονά ἐστιν ἡμικυκλίων.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω ὁ ΑΔ κύκλος τῷ ΒΓ κύκλῳ ἴσος τε καὶ παράλληλος· λέγω, ὅτι τῶν ΑΔ, ΒΓ κύκλων τὰ ἐναλλὰξ τμήματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΔ κύκλος τῷ ΒΓ κύκλῳ ἴσος ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ περιφέρεια τῇ ΕΒ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΔΖ περιφέρεια τῇ ΖΓ περιφερείᾳ· [ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΓ (a)] συναμφότεραι ἄρα αἱ ΑΕ, ΔΖ συναμφοτέραις ταῖς ΕΒ, ΖΓ ἴσαι εἰσίν· ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΕΑΔΖ ὅλη τῇ ΕΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ λοιπῇ τῇ ΒΓ ἴση ἐστὶ, διὰ τὸ ἡμικυκλίου εἶναι ἑκατέραν τῶν ΕΑΔΖ, ΕΒΓΖ, μέγιστοι γάρ εἰσιν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖ (b). Καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου αἱ ΑΔ, ΒΓ περιφέρειαι, ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ· καί ἐστιν ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἡ ὑπὸ τὴν ΑΔ περιφέρειαν ὑποτείνουσα, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Γ ἡ ὑπὸ τὴν ΒΓ περιφέρειαν

---

a) **Uncis inclusa prorsus nihil faciunt in demonstrationem, inde spuria existimo.**

b) **Fortasse addendum** κύκλοι.

ὑποτείνουσα εὐθεῖα· ἐν δὲ τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· ἡ μὲν ἄρα τοῦ ΑΔ κύκλου μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ΒΓ κύκλου μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ τοῦ ΑΔ κύκλου ἐλάσσων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ΒΓ κύκλου ἐλάσσονι περιφερείᾳ. Καί ἐστι τὸ μὲν ΑΔ μεῖζον ἡμικυκλίου, τὸ δὲ ΒΓ ἐλάττον· τῶν ἄρα ΑΔ, ΒΓ κύκλων τὰ ἐναλλὰξ τμήματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ′. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος παραλλήλους τινὰς κύκλους τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ διὰ τῶν πόλων τέμνῃ, τῶν ἀπολαμβανομένων περιφερειῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἡμισφαιρίων μείζονες ἢ ὅμοιαι ἔσονται αἱ ἔγγιον τοῦ φανεροῦ πόλου τῶν ἀπώτερον.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ παραλλήλους τινὰς κύκλους τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ μὴ διὰ τῶν πόλων τεμνέτω· λέγω, ὅτι τῶν ἀπολαμβανομένων περιφερειῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἡμισφαιρίων μείζονες ἢ ὅμοιαι ἔσονται αἱ ἔγγιον τοῦ φανεροῦ πόλου τῶν ἀπώτερον· τοῦτ᾽ ἔστιν, ὅτι ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΓΔ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΕΖ. F. 42. 43.

Ἔστω γὰρ ὁ φανερὸς πόλος τῶν παραλλήλων τὸ Η σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Η καὶ ἑκατέρου τῶν Γ, Δ μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΗΘΓ, ΗΚΔ.

Οἱ ἄρα ΗΘΓ, ΗΚΔ ὁμοίας ἀφαιροῦσι περιφερείας τὰς μεταξὺ αὐτῶν, ἡ ΘΚ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ὁμοία, ἡ ΑΘΚΒ ἄρα τῆς ΓΔ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΕΖ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, γραφόντων ἡμῶν διὰ τοῦ Η καὶ ἑκατέρου τῶν Ε, Ζ μέγιστους κύκλους.

Δύναται δὲ δειχθῆναι, καὶ μὴ γραφόντων ἡμῶν, μόνον δὲ προςαναπληρούντων τοὺς ΗΘΓ, ΗΚΔ, ΕΖ, ὡς ἐν τῷ θεωρήματι (a).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα′. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν ἴσαις σφαίραις ἐπὶ μέγιστων κύκλων μέγιστοι κύκλοι κεκλιμένοι ὦσιν, ὁποτερουοῦν αὐτῶν ὁ πό-

a) Conjeceram olim ὡς ἐν τῷ σχήματι, quoniam textui graeco appositam figuram reperimus significatae alteri demonstrationis viae convenientem. Sed potius exspectes ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, quod quum nimis recedat a lectione vulgari, iam propono ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι, quemadmodum est I, 19.

λος μετεωρότερος ᾖ, μᾶλλον ἔσται κεκλιμένος· ὧν δὲ κύκλων οἱ πόλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων, ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι.

Ἐν γὰρ σφαίραις ἴσαις ἐπὶ μεγίστων κύκλων τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΒΚΔ, ΖΛΘ κεκλιμένοι ἔστωσαν, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΒΚΔ κύκλου πόλος τὸ Μ σημεῖον, τοῦ δὲ ΖΛΘ κύκλου πόλος τὸ Ν σημεῖον, μετεωρότερον δὲ ἔστω τὸ Μ τοῦ Ν· λέγω, ὅτι ὁ ΒΚΔ κύκλος πρὸς τον ΑΒΓΔ κύκλον μᾶλλον κέκλιται, ἤπερ ὁ ΖΛΘ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ.

Γεγράφθω διὰ μὲν τοῦ Μ καὶ ἑνὸς τῶν τοῦ ΑΒΓΔ πόλων μέγιστος κύκλος ὁ ΑΚΜΓ, διὰ δὲ τοῦ Ν καὶ ἑνὸς τῶν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου πόλων μέγιστος κύκλος ὁ ΕΛΝΗ· καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τοῦ ΒΚΔ κοινὴ τομὴ ἡ ΒΔ, τοῦ δὲ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τοῦ ΑΚΜΓ κοινὴ τομὴ ἡ ΑΓ, τοῦ δὲ ΒΚΔ καὶ τοῦ ΑΚΜΓ κοινὴ τομὴ ἡ ΚΞ· καὶ ἔτι τοῦ μὲν ΕΖΗΘ κύκλου καὶ τοῦ ΖΛΘ κοινὴ τομὴ ἡ ΖΘ, τοῦ δὲ ΕΖΗΘ κύκλου καὶ τοῦ ΕΛΝΗ κοινὴ τομὴ ἡ ΕΗ, τοῦ δὲ ΕΛΝΗ καὶ τοῦ ΖΛΘ κοινὴ τομὴ ἡ ΛΟ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΚΜΓ κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς ΑΒΓΔ, ΒΚΔ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτοὺς τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὁ ΑΚΜΓ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒΓΔ, ΒΚΔ κύκλων, ὥςτε καὶ ἑκάτερος τῶν ΑΒΓΔ, ΒΚΔ κύκλων ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΑΚΜΓ κύκλον. Ἐὰν δὲ δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ κοινὴ ἄρα τομὴ τῶν ΑΒΓΔ, ΒΚΔ κύκλων ἡ ΒΔ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΚΜΓ κύκλον, ὥςτε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ΑΚΜΓ κύκλου, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ τῆς ΒΞΔ ἑκατέρα τῶν ΚΞ, ΞΑ, οὖσα ἐν τῷ τοῦ ΑΚΜΓ κύκλου ἐπιπέδῳ· ἡ ΒΞ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΚΞ, ΞΑ ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα τέμνει ἄλληλα τὰ ΑΒΓΔ, ΒΚΔ, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἠγμέναι εἰσὶν ἡ ΚΞ, ΞΑ, ἡ μὲν ΚΞ ἐν τῷ τοῦ ΒΚΔ κύκλου ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ΞΑ ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΚΞΑ γωνία ἡ κλίσις ἐστὶν, ἐν ᾗ κέκλιται τὸ ΒΚΔ ἐπίπεδον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ ἐπίπεδον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΛΟΕ γωνία ἡ κλίσις ἐστὶν, ἐν ᾗ κέκλιται τὸ ΖΛΘ ἐπίπεδον πρὸς τὸ ΕΖΘ ἐπίπεδον. Λέγω δὴ, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΞΑ γωνία τῆς ὑπὸ ΛΟΕ γωνίας.

Ἐπεὶ γὰρ μετεωρότερον ἐστὶ τὸ Μ τοῦ Ν, ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Μ

κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου ἐπίπεδον μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ **Ν** καθέτου ἀγομένης ἐπὶ τὸ τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου ἐπίπεδον. Ἀλλ᾽ ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ **Μ** κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν πίπτει τοῦ τε **ΑΚΜΓ** κύκλου καὶ τοῦ **ΑΒΓΔ**, τοῦτ᾽ ἔστι, τὴν **ΑΓ**, διὰ τὸ ὀρθὰ εἶναι πρὸς ἄλληλα τὰ **ΑΚΜΓ**, **ΑΒΓΔ** ἐπίπεδα, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ **Ν** κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν **ΕΗ** πίπτει· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ **Μ** κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὴν **ΑΓ** μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ **Ν** ἐπὶ τὴν **ΕΗ** ἀγομένης καθέτου. Ἐπεὶ οὖν δύο τμήματα κύκλων ἴσα ἐστὶ τὰ **ΑΚΜΓ**, **ΕΛΝΗ**, καὶ τυχόντα σημεῖα τὰ **Μ**, **Ν**, καί ἐστιν ἡ ἀπὸ τοῦ **Μ** κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὴν **ΑΓ** μείζων τῆς ἀπὸ τοῦ **Ν** ἀγομένης καθέτου ἐπὶ τὴν **ΕΗ**· μείζων ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ **ΜΓ** περιφέρεια τῆς **ΝΗ** περιφερείας. Ἴση δὲ ἡ **ΜΚ** περιφέρεια τῇ **ΝΛ** περιφερείᾳ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· ὅλη ἄρα ἡ **ΚΜΓ** περιφέρεια ὅλης τῆς **ΛΝΗ** περιφερείας μείζων ἐστίν. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ **ΑΚΜΓ** ὅλῃ τῇ **ΕΛΝΗ** ἴση ἐστὶν, ὧν ἡ **ΚΜΓ** τῆς **ΛΝΗ** μείζων ἐστὶ, λοιπὴ ἄρα ἡ **ΑΚ** περιφέρεια λοιπῆς τῆς **ΕΛ** περιφερείας ἐλάσσων ἐστί. Καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς **ΑΚ** γωνία ἡ ὑπὸ **ΚΞΑ**, ἐπὶ δὲ τῆς **ΛΕ** γωνία ἡ ὑπὸ **ΛΟΕ**· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ **ΚΞΑ** γωνία τῆς ὑπὸ **ΛΟΕ**. Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ **ΚΞΑ** γωνία ἡ κλίσις ἐστὶν, ἐν ᾗ κέκλιται τὸ **ΒΚΔ** ἐπίπεδον πρὸς τὸ τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου ἐπίπεδον, ἡ δὲ ὑπὸ **ΛΟΕ** γωνία ἡ κλίσις ἐστὶν, ἐν ᾗ κέκλιται τὸ **ΖΛΘ** ἐπίπεδον πρὸς τὸ **ΕΖΗΘ** ἐπίπεδον· ἡ ἄρα τοῦ **ΒΚΔ** κύκλου πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον κλίσις ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ **ΖΛΘ** κύκλου πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον κλίσεως. Ὁ **ΒΚΔ** ἄρα κύκλος πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον μᾶλλον κέκλιται, ἤπερ ὁ **ΖΛΘ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν τῶν **ΒΚΔ**, **ΖΛΘ** κύκλων οἱ πόλοι ἴσον ἀπεχέτωσαν τῶν ἐπιπέδων, τοὐτ᾽ ἔστιν, ἔστω ἡ ἀπὸ τοῦ **Μ** κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου ἐπίπεδον ἴση τῇ ἀπὸ τοῦ **Ν** καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὸ τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου ἐπίπεδον· λέγω, ὅτι οἱ **ΒΚΔ**, **ΖΛΘ** κύκλοι πρὸς τοὺς **ΑΒΓΔ**, **ΕΖΗΘ** κύκλους ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι, τοῦτ᾽ ἔστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΚΞΑ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΛΟΕ** γωνίᾳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ **ΚΞΑ** γωνία ἡ κλίσις ἐστὶν, ἐν ᾗ κέκλιται τὸ τοῦ **ΒΚΔ** κύκλου ἐπίπεδον πρὸς τὸ τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου ἐπίπεδον, ἡ δὲ ὑπὸ

ΛΟΕ γωνία ἡ κλίσις ἐστὶν, ἐν ᾗ κέκλιται τὸ τοῦ ΖΛΘ κύκλου ἐπίπεδον πρὸς τὸ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐπίπεδον· λέγω οὖν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΞΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΛΟΕ γωνίᾳ.

Ἐπεὶ οὖν δύο τμήματα κύκλων ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΚΜΓ, ΕΛΝΗ, καὶ τυχόντα σημεῖα τὰ Μ, Ν, καί ἐστιν ἡ ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἀγομένη ἴση τῇ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὴν ΕΗ καθέτῳ ἀγομένῃ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΓ περιφέρεια τῇ ΗΝ περιφερείᾳ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΜΚ τῇ ΛΝ ἴση, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον γραφομένου· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΚΜΓ ὅλῃ τῇ ΛΝΗ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν· ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΚΜΓ ὅλῃ τῇ ΕΛΝΗ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΚ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΕΛ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση. Καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΚ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΚΞΑ, ἐπὶ δὲ τῆς ΛΕ γωνία ἡ ὑπὸ ΛΟΕ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΚΞΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΛΟΕ. Καί ἐστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΚΞΑ γωνία ἡ κλίσις, ἐν ᾗ κέκλιται τὸ τοῦ ΒΚΔ κύκλου ἐπίπεδον πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΟΕ γωνία ἡ κλίσις ἐστὶν, ἐν ᾗ κέκλιται τὸ τοῦ ΖΛΘ κύκλου ἐπίπεδον πρὸς τὸ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐπίπεδον· ἡ ἄρα κλίσις, ἐν ᾗ κέκλιται ὁ ΒΚΔ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἴση ἐστὶ τῇ κλίσει τοῦ ΖΛΘ κύκλου πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Οἱ ΒΚΔ, ΖΛΘ ἄρα κύκλοι πρὸς τοὺς ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλους ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι. Ἐμάθομεν γὰρ, ὅτι ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων πρὸς τοῖς αὐτοῖς σημείοις ἴσας γωνίας περιέχωσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἕτερον δὲ τούτῳ παράλληλον τέμνῃ μεταξὺ ὄντα τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ οὗ ἐφάπτεται ὁ μέγιστος κύκλος· ἔτι δὲ ὁ (a) πόλος τοῦ μεγίστου μεταξὺ ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι ἐφαπτόμενοι τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων· κεκλιμένοι ἔσονται πρὸς τὸν μέγιστον κύκλον, καὶ ὀρθότατος μὲν ἔσται ὁ τὴν συναφὴν ἔχων κατὰ τὴν διχοτομίαν τοῦ μείζονος τμήματος, ταπεινότατος δὲ ὁ τὴν

---

a) Ita *D.* ἔτι ὁ *P.* et *H.*

συναφὴν ἔχων κατὰ τὴν διχοτομίαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος· τῶν δὲ ἄλλων οἱ μὲν ἴσον ἀπέχοντες ὁποτερασοῦν τῶν διχοτομιῶν ὁμοίως εἰσὶ (a) κεκλιμένοι· ἀεὶ δὲ ὁ ποῤῥώτερον τὴν συναφὴν ἔχων τῆς διχοτομίας τοῦ μείζονος τμήματος, τοῦ ἔγγιον μᾶλλον ἔσται κεκλιμένος. Ἔτι δὲ οἱ (b) πόλοι τῶν μεγίστων ἐπὶ ἑνὸς ἔσονται κύκλου παραλλήλου τε καὶ ἐλάσσονος, ἤ ἐστιν ἐκεῖνος, οὗ ἐφάψεται ὁ ἐξ ἀρχῆς μέγιστος κύκλος.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ ΑΔ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Α σημεῖον, ἕτερον δὲ τούτῳ παράλληλον τὸν ΕΖΗΘ τεμνέτω μεταξὺ ὄντα τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ΑΔ κύκλου· ἔτι δὲ ὁ πόλος τοῦ ΑΒΓ κύκλου μεταξὺ ἔστω τῶν ΑΔ, ΕΖΗΘ, καὶ ἔστω τὸ Κ σημεῖον, καὶ γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΘΥ ἐφαπτόμενοι τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων τοῦ ΕΖΗΘ, καὶ ἔστω ὁ μὲν ΒΖΓ κύκλος κατὰ τὴν διχοτομίαν τοῦ μείζονος τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, ὁ δὲ ΥΘ κατὰ τὴν διχοτομίαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου κατὰ τὸ Θ σημεῖον, οἱ δὲ ΜΝΞ, ΟΠΡ ἴσον ἀπεχέτωσαν ὁποτερασοῦν τῶν διχοτομιῶν, ὁ δὲ ΤΣ ἔστω ὡς ἔτυχε· λέγω, ὅτι οἱ ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ κύκλοι κεκλιμένοι ἔσονται πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον καὶ ὀρθότατος μὲν αὐτῶν ἔσται ὁ ΒΖΓ, ταπεινότατος δὲ ὁ ΥΘ, οἱ δὲ ΜΝΞ, ΟΠΡ ὁμοίως ἔσονται κεκλιμένοι, ὁ δὲ ΣΤ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον μᾶλλον κέκλιται, ἤπερ ὁ ΟΠΡ· ἔτι δὲ οἱ πόλοι τῶν ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ ἐπὶ ἑνὸς ἔσονται κύκλου παραλλήλου τε καὶ ἐλάσσονος τοῦ ΑΔ. F. 45.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων τῶν ΑΔ, ΕΖΗΘ, καὶ ἔστω τὸ Λ σημεῖον, καὶ διὰ τῶν Α, Λ σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΛ. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔ ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἑνὸς πόλων καὶ τῆς ἀφῆς μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΑΛ· ὁ ΑΛ ἄρα ἥξει καὶ διὰ τῶν τοῦ ΑΒΓ (c) κύκλου πόλων, καὶ ἔσται ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. Καί ἐστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου πόλος τὸ Κ σημεῖον· ὁ ΑΛ ἄρα προσαναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Κ. Ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ὁ ΑΛΚ. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΕΖΗΘ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ

a) Malim ἔσονται.
b) Sic *D.* ἔτι οἱ *P.* et *H.*
c) τῶν ΑΒΓ *P.* et *H.*

τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΑΛΚ· ὁ ΑΛΚ ἄρα δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων. Καί ἐστι (a) τοῦ μὲν ΕΖΗ τμήματος διχοτομία τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΕΘΗ τμήματος διχοτομία τὸ Θ· ὁ ΑΛΚ ἄρα προςαναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Θ σημείων. Ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ὁ ΘΑΛΚΖ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Κ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καί ἐστιν ὁ ΑΒΓ μέγιστος· ἡ ΑΚ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΖΗΘ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ μεγίστου, καί ἐστι μεταξὺ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ΑΔ, καί ἐστιν αὐτοῦ πόλος τὸ Λ σημεῖον· ἡ ΛΖ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶ τῆς, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΑΚΖ μείζων ἐστὶ τῆς, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, ἡ δὲ ΛΖ ἐλάσσων· ἐὰν ἄρα τῇ, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἴσην ἀπολάβωμεν περιφέρειαν, μεταξὺ τῶν Α, Λ σημείων πεσεῖται. Ἀπειλήφθω αὐτῇ ἴση, καὶ ἔστω ἡ ΖΦ· καὶ πόλῳ μὲν τῷ Λ, διαστήματι δὲ τῷ ΛΦ κύκλος γεγράφθω ὁ ΦΧΨΩ, παράλληλος ἄρα ἐστὶ τοῖς ΑΔ, ΕΖΗΘ κύκλοις. Καὶ διὰ τοῦ Λ σημείου καὶ ἑκάστου τῶν Π, Ν, Τ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΝΛΩ, ΠΛΧ, ΤΛΨ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΝΛ τῇ ΛΖ, ἐκ τοῦ πόλου γὰρ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἡ δὲ ΛΩ τῇ ΛΦ, ἐκ τοῦ πόλου (b) γὰρ τοῦ ΦΧΨΩ· ὅλη ἄρα ἡ ΝΛΩ ὅλῃ τῇ ΖΛΦ ἐστιν ἴση. Καί ἐστιν ἡ ΖΛΦ ἴση τῇ, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· καὶ ἡ ΝΛΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΧΛΠ, ΨΛΤ, ΛΘ ἴση ἐστὶ τῇ, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΜΝΞ, ΕΖΗΘ ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἑνὸς τοῦ ΕΖΗΘ πόλων καὶ τῆς ἀφῆς μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΝΛΩ· ὁ ἄρα ΝΛΩ ἥξει καὶ διὰ τῶν τοῦ ΜΝΞ πόλων, καὶ ἔσται ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΜΝΞ κύκλος μέγιστός ἐστιν, ἡ ἄρα ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς

a) Καὶ ἔστω *P.* et *H.*
b) ἐκ πόλου *P.* et *H.*

τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· καί ἐστιν ἡ ΝΛΩ ἴση τῇ, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ Ω ἐκ τοῦ πόλου ἐστὶ τοῦ ΜΝΞ κύκλου· τὸ Ω ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΜΝΞ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ μὲν Φ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΒΖΓ κύκλου, τὸ δὲ Χ τοῦ ΟΠΡ, τὸ δὲ Ψ τοῦ ΣΤ, καὶ ἔτι τὸ τ τοῦ ΥΘ· οἱ ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ κύκλοι ἄρα τοὺς πόλους ἔχουσιν ἐπὶ ἑνὸς κύκλου παραλλήλου τε καὶ ἐλάσσονος τοῦ ΑΔ.

Λέγω δή, ὅτι οἱ ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ κύκλοι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον κεκλιμένοι εἰσί, καὶ ὅτι ὀρθότατος μέν ἐστιν αὐτῶν ὁ ΒΖΓ, ταπεινότατος δὲ ὁ ΥΘ, οἱ δὲ ΜΝΞ, ΟΠΡ ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι, ὁ δὲ ΣΤ πρὸς τὸν ΑΓΒ κύκλον μᾶλλον κέκλιται, ἤπερ ὁ ΟΠΡ πρὸς τὸν ΑΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΝΖ περιφέρεια τῇ ΖΠ περιφερείᾳ, καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΖ περιφέρεια τῇ ΖΠ περιφερείᾳ. Ἀλλ' ἡ μὲν ΝΖ τῇ ϛτ ἐστιν ὁμοία, ἡ δὲ ΖΠ τῇ τη, καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ϛτ περιφέρεια τῇ ητ περιφερείᾳ. Ἀλλ' ἡ μὲν ητ περιφέρεια τῇ ΧΦ περιφερείᾳ ἴση ἐστί, κατὰ κορυφὴν γάρ, ἡ δὲ ϛτ τῇ ΦΩ· καὶ ἡ ΦΩ ἄρα περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΧΦ. Κύκλου δέ τινος τοῦ ΦΧΨΩ ἐπὶ διαμέτρου, τῆς ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ τ, κύκλου τμῆμα ὀρθὸν ἐφέσταται τὸ ΦΚτ (a), καὶ ἀπειλημμένη ἐστὶν ἐλάσσων ἢ ἡμίσεια οὖσα τοῦ ὅλου τμήματος περιφέρεια ἡ τΚ, ἀπὸ δὲ τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΧΦ, ΦΩ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Κ σημείου ἐπὶ τὸ Χ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Ω ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ· ὁ ἄρα πόλῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΧ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ω. Ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ὁ ΧΙΩ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ὁ ΧΙΩ τῷ ΑΒΓ, περὶ γὰρ τοὺς αὐτοὺς πόλους ἐστὶν αὐτῷ, τὸ γὰρ Κ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ὁ ΧΙΩ κύκλος τῷ ΑΒΓ κύκλῳ, ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Χ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Ω καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον. Καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Ι κάθετος ἀγομένη ἴση ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν ἀπὸ τοῦ Χ, Ω καθέτων ἀγομένων, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Ι κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Φ

---

a) ΚτΦ *P.* et *H.* Ferri non potest, nam puncta Φ, τ sunt extrema huius arcus, qui incipit in puncto Φ, terminatur in τ.

καθέτου ἀγομένης ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Ω ἄρα κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Φ καθέτου ἀγομένης ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Χ κάθετος μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Φ καθέτου, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Ι ἀγομένῃ. Μετεωρότερον ἄρα ἐστὶ τὸ Ω τοῦ Φ· καί ἐστι τὸ μὲν Ω πόλος τοῦ ΜΝΞ κύκλου, τὸ δὲ Φ τοῦ ΒΖΓ· ὁ ἄρα τοῦ ΜΝΞ κύκλου πόλος μετεωρότερός ἐστι τοῦ ΒΖΓ κύκλου πόλου. Ὧν δὲ κύκλων οἱ πόλοι μετεωρότεροί εἰσι, μᾶλλόν εἰσι κεκλιμένοι, ὁ ΜΝΞ ἄρα κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον μᾶλλον κέκλιται, ἤπερ ὁ ΒΖΓ κύκλος· ὁ ἄρα ΒΖΓ κύκλος ὀρθότερός ἐστι τοῦ ΜΝΞ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πάντων τῶν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλων ἐφαπτομένων ὁ ΒΖΓ ὀρθότερός ἐστιν· ὀρθότατος ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΖΓ.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὁ ΥΘ κύκλος ταπεινότατός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ τ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Ψ καθέτου ἀγομένης ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον· μετεωρότερον ἄρα ἐστὶ τὸ τ τοῦ Ψ. Καί ἐστι τὸ μὲν τ πόλος τοῦ ΥΘ κύκλου, τὸ δὲ Ψ πόλος τοῦ ΣΤ κύκλου· ὁ ἄρα τοῦ ΥΘ πόλος μετεωρότερός ἐστι τοῦ ΣΤ πόλου. Ὧν δὲ κύκλων οἱ πόλοι μετεωρότεροί εἰσι, μᾶλλόν εἰσι κεκλιμένοι· ὁ ΥΘ ἄρα κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον μᾶλλον κέκλιται, ἤπερ ὁ ΣΤ, ταπεινότερος ἄρα ἐστὶν ὁ ΥΘ τοῦ ΣΤ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πάντων τῶν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐφαπτομένων ταπεινότερός ἐστιν ὁ ΥΘ· ὁ ΥΘ ἄρα ταπεινότατός (a) ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Ω κάθετος ἀγομένη ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Χ καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον· τὰ Ω, Χ ἄρα σημεῖα ἴσον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου. Καί ἐστι τὸ μὲν Ω σημεῖον πόλος τοῦ ΜΝΞ κύκλου, τὸ δὲ Χ σημεῖον πόλος τοῦ ΟΠΡ κύκλου· τῶν ΜΝΞ, ΟΠΡ ἄρα κύκλων οἱ πόλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὧν δὲ κύκλων οἱ πόλοι ἴσον ἀπέχουσι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι· οἱ αρα ΜΝΞ, ΟΠΡ κύκλοι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι.

Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Ψ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Χ καθέτου ἀγομένης ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον· μετεωρότερον ἄρα ἐστὶ τοῦ Χ τὸ Ψ. Καί ἐστι τὸ μὲν Ψ πόλος τοῦ ΣΤ κύκλου, τὸ δὲ Χ πόλος τοῦ

a) ταπεινότερός *P.* et *H.*

ΟΠΡ· ὁ ἄρα τοῦ ΣΤ κύκλου πόλος μετεωρότερός ἐστι τοῦ ΟΠΡ κύκλου πόλου. Ὧν δὲ κύκλων οἱ πόλοι μετεωρότεροί εἰσι, μᾶλλόν εἰσι κεκλιμένοι· ὁ ΣΤ ἄρα κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον μᾶλλον κέκλιται ἤπερ ὁ ΟΠΡ.

Οἱ ἄρα ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ κύκλοι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον κεκλιμένοι εἰσὶ, καὶ ὀρθότατος μέν ἐστιν αὐτῶν ὁ ΒΖΓ, ταπεινότατος δὲ ὁ ΥΘ, οἱ δὲ ΜΝΞ, ΟΠΡ ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι, ὁ δὲ ΣΤ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον μᾶλλον κέκλιται ἤπερ ὁ ΟΠΡ· ἔτι δὲ οἱ πόλοι αὐτῶν ἐπὶ ἑνός εἰσι κύκλου παραλλήλου τε καὶ ἐλάσσονος τοῦ ΑΔ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ΄. ΘΕΩΡ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν αἱ ἀπὸ τῶν συνδέσμων ἐπὶ τὰς ἐπαφὰς καθήκουσαι περιφέρειαι ἴσαι ὦσιν, ὁμοίως ἔσονται κεκλιμένοι οἱ προειρημένοι μέγιστοι κύκλοι.

Ἔστωσαν γὰρ αἱ ἀπὸ τῶν συνδέσμων, τοῦτ᾽ ἔστι, τῶν Μ, Ρ σημείων, ἐπὶ τὰ Π, Ν καθήκουσαι περιφέρειαι αἱ ΝΜ, ΠΡ ἴσαι· λέγω, ὅτι οἱ ΜΝΞ, ΟΠΡ κύκλοι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι. F. 46.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων κύκλων τῶν ΑΔ, ΕΖΗΘ, καὶ ἔστω τὸ Λ σημεῖον, καὶ διὰ τῶν Α, Λ σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΘΑΛΖΥ· φανερὸν δὴ, ὅτι καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου, πόλου ὄντος τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἐλεύσεται· καὶ διὰ τοῦ Λ, καὶ δι᾽ ἑκατέρου τῶν Ν, Π μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΛΝΒ, ΛΠΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, οἱ ΕΖΗΘ, ΜΝΞ, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἑνὸς πόλων καὶ τῆς ἁφῆς μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΛΝΒ· ὁ ΛΝΒ ἄρα ἥξει καὶ διὰ τῶν τοῦ ΜΝΞ πόλων, καὶ ἔσται ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὁ ΛΠΓ διὰ τῶν τοῦ ΟΠΡ πόλων ἐστὶ, καὶ ὀρθός ἐστι πρὸς αὐτόν. Καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις κύκλοις τοῖς ΜΝΞ, ΟΠΡ, ἐπὶ διαμέτρων ἀπὸ τῶν Ν, Π σημείων, ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφέσταται, τὰ ΝΛ, ΠΛ, καὶ τὰ τούτοις συνεχῆ, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΝΛ, ΠΛ, ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὖσαι τῶν ὅλων, ἀπὸ δὲ τῶν ἐξ ἀρχῆς κύκλων ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΜΝ, ΠΡ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Μ σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Ρ ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ· ὁ ἄρα πόλῳ

μὲν τῷ Λ, διαστήματι δὲ τῷ ΛΜ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ρ. Ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὁ ΜΞΟΡ· καί ἐστι (a) τοῖς ΑΔ, ΕΖΗΘ κύκλοις παράλληλος, περὶ γὰρ τοὺς αὐτοὺς πόλους ἐστὶν αὐτοῖς. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΜΞΟΡ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΘΑΛΚΖΥ, ὁ ἄρα ΘΑΛΚΖΥ τέμνει δίχα τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΥ περιφέρεια τῇ ΥΡ περιφερείᾳ. Πάλιν, ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΜΝΞ, ΜΞΥΟΡ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΛΝΒ, ὁ ἄρα ΛΝΒ δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΜΝ περιφέρεια τῇ ΝΞ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΜΣ τῇ ΣΞ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΟΠ τῇ ΠΡ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΟΤ τῇ ΤΡ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΜΝ περιφέρεια τῇ ΠΡ περιφερείᾳ, καί ἐστι τῆς μὲν ΜΝ διπλῆ ἡ ΜΝΞ, τῆς δὲ ΠΡ διπλῆ ἡ ΟΠΡ· καὶ ἡ ΜΝΞ ἄρα τῇ ΟΠΡ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἴσοι οἱ κύκλοι, ἡ ἄρα τὴν ΜΝΞ περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ τὴν ΟΠΡ περιφέρειαν ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ. Ἀλλ' ἡ μὲν τὴν ΜΝΞ περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα ὑποτείνει καὶ τὴν ΜΣΞ, ἡ δὲ τὴν ΟΠΡ περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα ὑποτείνει καὶ τὴν ΟΤΡ· καὶ ἡ ἄρα τὴν ΜΣΞ περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ τὴν ΟΤΡ περιφέρειαν ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ· καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΣΞ περιφέρεια τῇ ΟΤΡ περιφερείᾳ. Καί ἐστι τῆς μὲν ΜΣΞ περιφερείας ἡμίσεια ἡ ΜΣ, τῆς δὲ ΟΤΡ ἡμίσεια ἡ ΡΤ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΣ τῇ ΡΤ· ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΜΣΞΥ ὅλῃ τῇ ΥΟΤΡ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΣΞΥ λοιπῇ τῇ ΥΟΤ ἐστιν ἴση· καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΥΞΣ περιφέρεια τῇ ΥΟΤ περιφερείᾳ. Ἀλλ' ἡ μὲν ΣΞΥ περιφέρεια τῇ ΝΖ περιφερείᾳ ἐστὶν ὁμοία, ἡ δὲ ΥΟΤ τῇ ΖΠ, καὶ ἡ ΝΖ ἄρα τῇ ΖΠ περιφερείᾳ ἐστὶν ὁμοία· καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΖ περιφέρεια τῇ ΖΠ περιφερείᾳ. Οἱ ἄρα ΜΝΞ, ΟΠΡ κύκλοι ἴσον ἀπέχουσιν ὁποτερασοῦν τῶν διχοτομιῶν, ὁμοίως ἄρα εἰσὶ κεκλιμένοι. Οἱ ἄρα ΜΝΞ, ΟΠΡ κύκλοι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι.

---

a) Καὶ ἔστω *P.* et *H.* Desidero praeterea coniunctionem conclusivam ἄρα, neque tamen addo, propterea quod turbatam periodum credam, ita fortasse restituendam: παράλληλος ἄρα ἐστὶ τοῖς rel.

ΘΕΟΔΟΣΙΟΥ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν εἰς κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα εἰς ἄνισα τέμνουσα τὸν κύκλον, καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἐπισταθῇ μὴ μεῖζον ἡμικυκλίου, διαιρεθῇ δὲ ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα· ἡ ὑπὸ τὴν ἐλάσσονα περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα ἐλαχίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν μείζονα περιφέρειαν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου προςπιπτουσῶν εὐθειῶν, καὶ ἀεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου μεταξὺ τῆς ἐλαχίστης καὶ τῆς διαμέτρου, ἐφ᾽ ἣν ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου κάθετος πίπτει, διαγομένων εὐθειῶν· πασῶν δὲ μεγίστη ἡ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τὸ πέρας τῆς αὐτῆς διαμέτρου· ἔτι δὲ ἡ ὑπὸ τὴν μείζονα περιφέρειαν τοῦ τμήματος ἐφεστῶτος ὑποτείνουσα ἐλαχίστη ἐστὶ πασῶν τῶν μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς διαμέτρου προςπιπτουσῶν (a) εὐθειῶν, καὶ ἀεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων. Ἐὰν δὲ ἡ διαχθεῖσα διάμετρος ᾖ τοῦ κύκλου, τὰ δὲ λοιπὰ τὰ αὐτὰ ὑπάρχῃ· ἐλάσσων μὲν

a) Velim equidem legere πρὸς τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου περιφέρειαν προςπιπτουσῶν, ut res explicetur significantius, sed non induco in textum, ne novarum rerum avidus videar.

ἔσται ἡ προςκειμένη (a) *εὐθεῖα πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη δὲ ἡ ὑπὸ τὴν μείζονα περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα.*

F. 47. Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΒΔ, εἰς ἄνισα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἔστω δὲ μείζων ἡ ΒΓΔ περιφέρεια τῆς ΒΑΔ περιφερείας· καὶ ἐπὶ τῆς ΒΔ (b) ὀρθὸν τμῆμα κύκλου ἐφεστάτω τὸ ΒΕΔ μὴ μεῖζον ἡμικυκλίου, καὶ διῃρήσθω ἡ ΒΕΔ περιφέρεια εἰς ἄνισα τμήματα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἔστω ἐλάσσων ἡ ΒΕ περιφέρεια τῆς ΕΔ περιφερείας, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΕ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΒΓΔ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΕΖ, πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ΑΒΓΔ, ΒΕΔ ἐπιπέδων, τὴν ΒΔ εὐθεῖαν, ἐπειδήπερ τὸ ΒΕΔ τμῆμα, ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. Καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΗ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Θ, Κ μέρη· καὶ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΒΓΔ περιφέρειαν προςβεβλήσθω ἡ ΕΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ἅπτεται δὲ τῆς ΕΖ ἑκατέρα τῶν ΖΒ, ΖΛ, οὖσα ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ, καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΖΕ, ΛΖΕ γωνιῶν ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΛ ἐλάσσων ἐστίν, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΛ· κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΒ ἐλάσσονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΛ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΛ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΕ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῆς ΛΕ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΒΓΔ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΒΕ· ἡ ἄρα ΒΕ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΒΓΔ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν.

---

a) An προκειμένη legendum? Etenim προςκεῖσθαι Theodosio est *additum esse*, ut II, 6. 3. 17, adeo in hoc ipso theoremate.

b) ἐπὶ ΒΔ *P.* et *H.*

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων, τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου διαγομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Β, Κ σημείων.

Διήχθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΕΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΛΖ τῆς ΖΓ ἐστὶν ἐλάσσων, ἔλαττον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΛ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ· κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΛ ἐλάσσονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΓ. Ἀλλὰ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΛΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΕ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΕ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ἐλάσσων ἄρα ἡ ΛΕ τῆς ΕΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ΕΒ, τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστὶ τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου διαγομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Β, Κ.

Ἐπεζεύχθωσαν δὴ καὶ αἱ ΕΚ, ΕΔ· λέγω δὴ πάλιν, ὅτι ἡ μὲν ΕΚ μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου διαγομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Δ, Β σημείων.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΚΖ τῆς ΓΖ μείζων ἐστί, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΖ· κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΚΖ, ΖΕ, τοῦτ' ἔστι, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ, μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΓ, τοῦτ' ἔστι, τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· μείζων ἄρα ἡ ΚΕ τῆς ΕΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΒΔ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν μείζων ἐστὶν ἡ ΕΚ· ἡ ἄρα ΕΚ μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὸν ΒΔ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν.

Λέγω δὴ, ὅτι (a) καὶ ἡ ΕΔ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου προςπιπτουσῶν εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Κ, Δ σημείων.

Διήχθω γὰρ καὶ ἑτέρα ἡ ΕΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΖ τῆς ΖΜ ἐστιν ἐλάσσων, ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ· κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΔ, τοῦτ' ἔστι, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ, ἐλασσονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΜ, τοῦτ' ἔστι, τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΜ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῆς ΕΜ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΚΔ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Κ, Δ σημείων ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΕΔ· ἡ ἄρα ΕΔ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΚΔ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Κ, Δ σημείων, καὶ ἀεὶ

a) Λέγω ὅτι *P.* et *H.*

ἢ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστὶ, τῶν μεταξὺ τῶν Κ, Δ σημείων διαγομένων εὐθειῶν.

F. 48. Ἀλλὰ δὴ ἡ διαγομένη ΒΔ διάμετρος ἔστω τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, τὰ δὲ αὐτὰ λοιπὰ ὑποκείσθω· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ΕΒ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἡ δὲ ΕΔ μεγίστη.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΔΕ περιφέρεια τῆς ΕΒ περιφερείας, καὶ κάθετος ἦκται ἡ ΕΖ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ τῆς ΖΒ. Καί ἐστιν ἡ ΒΔ διάμετρος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἐπὶ τῆς ΔΖ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΔΖ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΒ, ὥςτε καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΔΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ· κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὰ μὲν ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ, τοῦτ᾽ ἔστι, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ, τοῦτ᾽ ἔστι, τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ, τοῦτ᾽ ἔστι, τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΖΕ, τοῦτ᾽ ἔστι, τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ· ἡ μὲν ΔΕ ἄρα τῆς ΕΓ μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ ΕΓ τῆς ΕΒ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη (a) μέν ἐστιν ἡ ΔΕ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΕΒ.

Μεγίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἡ δὲ ΕΒ ἐλαχίστη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν εἰς κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα ἀπολαμβάνουσα τμῆμα μὴ ἔλασσον ἡμικυκλίου, καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς τμῆμα κύκλου ἐπισταθῇ μὴ μεῖζον ἡμικυκλίου, διαιρεθῇ δὲ ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα· ἡ ὑπὸ τὴν ἐλάσσονα περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν μὴ ἐλάσσονα ἡμικυκλίου περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν (b).

---

a) Fortasse μείζων.

b) Theorematis enunciationem, ut nunc ob oculos posita est, cum ipsa demonstratione conferentes non possumus non animadvertere, latius patere

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΓ, ἀπολαμβάνουσα τμῆμα μὴ ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ τμῆμα κύκλου ἐφεστάτω τὸ ΑΕΓ, μὴ μεῖζον ἡμικυκλίου, κεκλιμένον πρὸς τὸ μὴ μεῖζον ἡμικυκλίου τὸ ΑΔΓ, καὶ διῃρήσθω ἡ ΑΕΓ περιφέρεια εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΕ περιφέρεια τῆς ΕΓ περιφερείας, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΑ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΑ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ (a) τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν. F. 49.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος· πεσεῖται δὴ μεταξὺ τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς ΑΔΓ περιφερείας, διὰ τὸ κεκλίσθαι τὸ ΑΕΓ τμῆμα πρὸς τὸ ΑΔΓ τμῆμα. Πιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ ΕΖ, παὶ συμβαλλέτω τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ἤτοι δὴ ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἢ μεταξὺ τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς ΑΒΓ περιφερείας, διὰ τὸ ΑΒΓ τμῆμα ὑποκεῖσθαι μὴ ἔλασσον ἡμικυκλίου. Ἔστω πρότερον μεταξὺ τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς ΑΒΓ περιφερείας, καὶ ἔστω τὸ Η σημεῖον, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΗ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Δ, Β μέρη, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν προςβεβλήσθω εὐθεῖα ἡ ΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπε-

---

hanc quam illam. Quodsi iam inde nostro quodam iure colligere possumus, theorematis enunciationem pervenisse ad nos in fine mutilatam, rem confirmat Voegelini Arabs, enunciationem his verbis continuans:

„*Quae autem diametrum terminat transeuntem per punctum, in quo perpendicularis a puncto divisionis descendens in superficiem circuli ipsius circuli superficiei occurrit, omnium erit longissima. Earum vero, quae inter extremitatem huius diametri et minoris arcus cadunt, quae extremitati minoris arcus erunt propiores, erunt breviores, quae autem remotiores, longiores. At vero earum, quae inter extremitatem eiusdem diametri et maioris arcus cadunt, quae maiori arcui subtenditur, est omnium brevissima. Ceterae autem eo breviores, quo sibi propiores, eo autem maiores, quo ab ea remotiores.*"

Huic certe ita completae propositioni ad amussim respondet Theodosiana demonstratio, neglectis solummodo iis, quae ad calcem proponuntur, esse ΕΘ $<$ ΕΙ, et ΕΛ $<$ ΕΚ; sed haec ad normam priorum facillime possunt demonstrari.

Lineas ΕΙ, ΕΛ non tractu continente, sed punctis lapidi incidi curavi, quum in archetypo non inveniantur.

a) *πασῶν ἀπὸ P.* et *H.*

δον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ ουσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιῆσαι γωνίας. Ἅπτεται δὲ τῆς ΕΖ ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΖΘ οὖσα ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΘΖΕ γωνιῶν ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΖ τῆς ΖΘ ἐστιν ἐλάσσων, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΘΖ· κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ, τοῦτ' ἔστι, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ, ἐλάσσονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΘΖ, ΖΕ, τοῦτ' ἔστι, τοῦ ἀπὸ τῆς ΘΕ, ἡ ΑΕ ἄρα τῆς ΕΘ ἐστιν ἐλάσσων. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΕ, ἡ ἄρα ΑΕ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν. Καὶ πάλιν ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἀεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστὶ, τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου διαγομένων εὐθειῶν πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἄχρι τοῦ Β περιφέρειαν, μεταξὺ δηλονότι τῶν Α, Β σημείων.

Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΕΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΒ μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΖ τῆς ΖΘ ἐστι μείζων, μεῖζον ἄρα ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ τοῦ τῆς ΖΘ· κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΖΕ, τοῦτ' ἔστι, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΘΖ, ΖΕ, τοῦτ' ἔστι, τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ· μείζων ἄρα ἐστὶ ἡ ΒΕ τῆς ΕΘ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν ἡ ΕΒ μείζων ἐστίν· ἡ ΕΒ ἄρα μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν.

Ἐπεζεύχθω δὴ καὶ ἡ ΕΓ· λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἡ ΕΓ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς πὴν ΒΓ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Β, Γ σημείων.

Διήχθω γὰρ μεταξὺ τῶν Β, Γ σημείων καὶ ἑτέρα ἡ ΕΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΖΚ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΚ ἐστὶν ἐλάσσων, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΚ· κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ, τοῦτ' ἔστι, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ἔλασσόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΚΖ, ΖΕ, τοῦτ' ἔστι, τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· ἡ ΓΕ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΕΚ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΒΚΓ περιφέρειαν προςπιπτου-

σῶν εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Β, Γ σημείων ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΕΓ. Καὶ πάλιν ὁμοίως δείξομεν, ὅτι αἰεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων, τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΒΓ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Β, Γ σημείων.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, κἂν ἡμικύκλιον ᾖ τὸ ΑΒΓ, ὅτι ἡ ΑΕ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, ἀπὸ δὲ ἑκατέρου αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἑξῆς ἐφ' ἑκάτερα τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους· αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰ πέρατα τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη περιφερειῶν εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν F. 50.
ἀλλήλους κατὰ τὸ Ε σημεῖον, ἀπὸ δὲ ἑκατέρου αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν ἑξῆς ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ε σημείου, ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΕΓ τῇ ΕΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΑ, ΒΔ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΒΔ.

Ὁ γὰρ πόλῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β· ἤτοι δὴ καὶ διὰ τοῦ Γ ἥξει, ἢ οὔ. Ἐρχέσθω πρότερον καὶ διὰ τοῦ Γ, ἥξει ἄρα καὶ διὰ τοῦ Δ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΕ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφερείᾳ. Ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὁ ΑΓΒΔ κύκλος,· καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΓΒΔ κύκλου καὶ τοῦ ΑΕΒ κοινὴ τομὴ ἡ ΑΒ, τοῦ δὲ ΑΓΒΔ κύκλου καὶ τοῦ ΓΕΔ κοινὴ τομὴ ἡ ΓΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕΒ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΑΓΒΔ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ἡ ΑΒ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΓΒΔ κύκλου· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΑΖ, ΖΓ, ΖΒ, ΖΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΔΖ, ΖΒ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΖΒ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΒ ἐστιν ἴση.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὁ πόλῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ (a) F. 51.
κύκλος γραφόμενος μὴ ἐρχέσθω διὰ τοῦ Γ, ἀλλ' ὑπερπιπτέτω αὐτό·

---

a) δὲ ΕΑ *P.* et *H.*

ἥξει μὲν ἄρα καὶ διὰ τοῦ Β, ὑπερπεσεῖται δὲ καὶ τὸ Δ. Ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ὁ ΑΗΒΘ, καὶ προςαναπεπληρώσθω ὁ ΓΕΔ κύκλος κατὰ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΗΒΘ κύκλου καὶ τοῦ ΑΕΒ κοινὴ τομὴ ἡ ΑΒ, τοῦ δὲ ΑΗΒΘ κύκλου καὶ τοῦ ΗΕΘ κοινὴ τομὴ ἡ ΗΘ.

Ὁμοίως δὴ πάλιν δείξομεν, ὅτι τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΗΒΘ κύκλου, καὶ ὅτι ἑκάτερος τῶν ΑΕΒ, ΗΕΘ ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΑΗΒΘ κύκλον. Ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τῶν Γ, Δ σημείων ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΗΒΘ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι αἱ ΓΚ, ΔΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΛΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ περιφέρεια τῇ ΕΘ περιφερείᾳ, πόλος γάρ ἐστι τὸ Ε σημεῖον τοῦ ΑΗΒΘ, ὧν ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ λοιπῇ τῇ ΔΘ ἐστιν ἴση. Ἐπεὶ οὖν τμῆμα κύκλου ὀρθόν ἐστι τὸ ΗΕΘ, καὶ ἀπειλημμέναι εἰσὶν ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΗΓ, ΔΘ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΗΒΘ κύκλου ἐπίπεδον αἱ ΓΚ, ΔΛ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΓΚ τῇ ΔΛ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΘΛ· ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΗΖ ὅλῃ τῇ ΖΘ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ λοιπῇ τῇ ΛΖ ἐστιν ἴση· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΒΖ ἴση, αἱ ΑΚ, ΛΒ ἄρα ἴσαι εἰσίν. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΚ τῇ ΛΒ, ἡ δὲ ΓΚ τῇ ΔΛ· δύο δὴ αἱ ΑΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΒΛ, ΛΔ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΚΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΛΒ ἐστιν ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΒ ἐστιν ἴση.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, ἀπὸ δὲ ἑνὸς αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἑξῆς ἐφ' ἑκάτερα τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους· διὰ δὲ τῶν γινομένων σημείων ἐπίπεδα παράλληλα ἐκβληθῇ, ὧν τὸ ἓν συμπίπτῃ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν κύκλων ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὡς κατὰ τὸ εἰρημένον σημεῖον, μία δὲ τῶν ἴσων περιφερειῶν μείζων ᾖ ἑκατέρας τῶν ἀπειλημμένων (a) ὑπὸ τῶν ἠγμένων ἐπιπέδων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ· ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ ἀσυμπτώτου ἐπιπέδου μείζων ἐστὶ τῆς

a) Magis definitum foret τῶν τοῦ ἑτέρου κύκλου ἀπειλημμένων.

μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τοῦ συμπίπτοντος ἐπιπέδου τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΕΒ, ΓΕΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ε σημεῖον· ἀπὸ δὲ ἑνὸς αὐτῶν τοῦ ΑΕΒ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ ἐξῆς ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ε σημείου, καὶ διὰ τῶν Α, Β (a) σημείων ἐπίπεδα παράλληλα διήχθω τὰ ΑΔ, ΓΒ, ὧν τὸ ΑΔ συμπιπτέτω τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ΑΕΒ, ΓΕΔ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὡς κατὰ τὸ Ε σημεῖον, μία δὲ τῶν ἴσων περιφερειῶν τῶν ΑΕ, ΕΒ μείζων ἔστω ἑκατέρας τῶν ΓΕ, ΕΔ· λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΓΕ περιφέρεια τῆς ΕΔ περιφερείας. F. 52.

Ὁ πόλῳ γὰρ τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος γραφόμενος ἥξει μὲν διὰ τοῦ Β, ὑπερπεσεῖται δὲ τὰ Γ, Δ σημεῖα, διὰ τὸ ἑκατέραν τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρας τῶν ΓΕ, ΕΔ μείζονα εἶναι. Ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ὁ ΑΗΒΖ, καὶ προςαναπεπληρώσθωσαν οἱ κύκλοι· καὶ ὁ μὲν ΑΔ κύκλος συμπιπτέτω τῷ ΑΗΒΖ κύκλῳ κατὰ τὸ Θ σημεῖον, ὁ δὲ ΒΓ κατὰ τὸ Κ σημεῖον· καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΗΒΖ καὶ τοῦ ΑΕΒ κοινὴ τομὴ ἡ ΑΒ, τοῦ δὲ ΑΗΒΖ καὶ τοῦ ΗΕΖ κοινὴ τομὴ ἡ ΗΖ, τοῦ δὲ ΑΔΘ κύκλου καὶ τοῦ ΑΗΒΖ κοινὴ τομὴ ἡ ΑΘ, τοῦ δὲ ΚΓΒ καὶ τοῦ ΑΗΒΖ κοινὴ τομὴ ἡ ΚΒ, τοῦ δὲ ΗΕΖ καὶ τοῦ ΑΔΘ κοινὴ τομὴ ἡ ΔΜ, τοῦ δὲ ΚΓΒ καὶ τοῦ ΗΕΖ κοινὴ τομὴ ἡ ΓΝ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΔ ἐπίπεδον συμπίπτει τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ΗΕΖ, ΑΕΒ ἐπίπεδων, τοῦτ' ἔστι, τῇ ΕΛ, ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὡς κατὰ τὸ Ε σημεῖον, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΛ ἐπὶ τὸ Ξ. Τὸ Ξ ἄρα σημεῖον ἐν τῷ ΑΔΘ ἐπιπέδῳ ἐστίν· ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ ΗΕΖ· ἔστι δὲ καὶ τὰ Δ, Μ σημεῖα ἐν ἀμφοτέροις τοῖς ΑΔΘ, ΗΕΖ ἐπιπέδοις· ἡ ΜΔ ἄρα συμπίπτει ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὡς κατὰ τὸ Ε σημεῖον, συμπεσεῖται δὴ κατὰ τὸ Ξ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕΒ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΑΗΒΖ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ἡ ΑΒ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΗΒΖ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΗΖ διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΗΒΖ κύκλου, κέντρον ἄρα ἐστὶν αὐτοῦ τὸ Λ. Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΚΓΒ, ΑΔΘ ὑπό τινος ἐπιπέδου τέμνεται τοῦ ΑΗΒΖ, αἱ κοιναὶ ἄρα αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΒ τῇ ΑΘ. Πάλιν ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ

---

a) διὰ τῶν ΑΔ, ΒΓ *P.* et *H.*

ΚΓΒ, ΑΔΘ ὑπό τινος ἐπιπέδου τέμνεται τοῦ ΗΕΖ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν ἄρα τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΝ τῇ ΔΜ. Καὶ ἐπεὶ ἑκάτερον τῶν ΑΕΒ, ΗΕΖ ἐπιπέδων πρὸς τὸ ΑΗΒΖ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν ἄρα τομὴ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΑΗΒΖ ἐπίπεδον· κοινὴ δὲ αὐτῶν τομή ἐστιν ἡ ΕΛ, καὶ ἡ ΕΛ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΑΗΒΖ ἐπίπεδον, ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΗΒΖ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ τῆς ΕΛ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΗΖ, οὖσα ἐν τῷ τοῦ ΑΗΒΖ κύκλου ἐπιπέδῳ, ἡ ΕΛ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΒ, ΗΖ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΞΛΜ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΞΛΝ (a), μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον (b) γωνίας τῆς ὑπὸ ΞΜΛ· ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΞΛΝ, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΞΜΛ, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΞΜΖ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΝ τῇ ΔΜ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΖ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΝΗ τῇ ὑπὸ ΞΜΛ· ὀξεῖα δὲ ἡ ὑπὸ ΞΜΛ, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΝΗ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΜ τῇ ΝΒ, καὶ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΜΝ, καί ἐστιν ἴση ἡ ΑΛ τῇ ΛΒ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΝΛ τῇ ΛΜ· ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΗΛ ὅλῃ τῇ ΛΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΝ λοιπῇ τῇ ΜΖ ἐστιν ἴση. Ἐπεὶ οὖν τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ ΗΕΖ, καὶ αἱ ἀπειλημμέναι ἴσαι εἰσὶν αἱ ΗΝ, ΜΖ, καὶ διηγμέναι εἰσὶ παράλληλοι αἱ ΓΝ, ΔΜ, καί ἐστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΝΗ ὀξεῖα, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΜΖ ἀμβλεῖα· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ περιφέρεια τῆς ΔΖ περιφερείας. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ΗΕ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΖΕ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΗΓ τῆς ΔΖ ἐστιν ἐλάσσων· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΕ περιφέρεια λοιπῆς τῆς ΕΔ περιφερείας μείζων ἐστίν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους· ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἑξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γινομένων σημείων παράλληλοι κύκλοι γραφῶσιν· ἀνίσους

a) ἡ ΞΛΝ *P.* et *H.*
b) ἀπεναντίου *P.* et *H.*

ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἔγγιον τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τῆς ποῤῥώτερον. F. 53.

Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ (a) ΑΒΓ ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ Α σημεῖον, καὶ τοῦτον τεμνέτωσαν δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΒΖΓ, ΔΖΕ πρὸς ὀρθάς. ὧν ὁ μὲν ΒΖΓ εἷς ἔστω τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΔΖΕ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους· ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ ΔΖΕ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΚΘ, ΘΗ ἑξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν παραλλήλων τοῦ ΒΖΓ, διὰ δὲ τῶν Κ, Θ, Η σημείων παράλληλοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΟΚΠ, ΝΘΞ, ΛΗΜ· λέγω, ὅτι οἱ ΟΚΠ, ΝΘΞ, ΛΗΜ κύκλοι ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου μεγίστου τοῦ ΑΒΓ, καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἔγγιον τοῦ ΒΖΓ τῆς ποῤῥώτερον· λέγω οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΟΝ περιφέρεια τῆς ΝΛ περιφερείας.

Γεγράφθω γὰρ διὰ τῶν Α, Θ σημείων μέγιστος κύκλος ὁ ΑΘΡ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΟΚΠ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΝΟ περιφέρεια τῇ ΑΘΡ περιφερείᾳ. Πάλιν ἐπεὶ το Α σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΝΘΞ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛΝ περιφέρεια τῇ ΑΣΘ περιφερείᾳ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΝΟ λοιπῇ τῇ ΘΡ ἐστιν ἴση. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΛΝ περιφέρεια τῇ ΣΘ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΘΡ, ἡ δὲ ΛΝ τῇ ΣΘ. Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΘΡ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΟΚΠ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὁ ΑΘΡ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΟΚΠ κύκλον. Κύκλου δέ τινος τοῦ ΟΚΠ ἐπὶ τῆς διαμέτρου τῆς ἀπὸ τοῦ Ρ τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἐφέσταται τὸ ΡΘ καὶ τὸ τούτῳ συνεχές· καὶ ἀπείληπται περιφέρεια ἡ ΡΘ ἐλάσσων ἢ ἡμίσεια τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Ρ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Θ σημείου πρὸς τὴν ΟΚΠ προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Ρ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένης εὐθείας· καί εἰσιν ἴσοι οἱ κύκλοι, μέγιστοι γάρ εἰσιν· ἡ ἄρα ΘΡ περιφέρεια ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘΚ περιφερείας. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΘΣ τῆς ΘΗ ἐλάσσων ἐστὶν, ὁμοίως εἰπόντες. Κύκλου δή τινος τοῦ ΛΗΜ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ἀπὸ τοῦ Σ σημείου

a) τῆς *P.* et *H.* Sed vide propp. 6. 9. 10. 11.

τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἐφέστηκε τὸ ΣΘ καὶ τὸ τούτῳ συνεχὲς, καί ἀπείληπται περιφέρεια ἡ ΣΘ ἐλάσσων ἡ ἡμίσεια οὖσα τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Σ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘΗ· καί ἐστιν ἴση ἡ ΚΘ τῇ ΘΗ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΘ, ΘΗ ἑκατέρας τῶν ΡΘ, ΘΣ ἐστὶ μείζων. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ὁ ΟΡΚΠ τῷ ΛΗΜ, ὁ δὲ ΟΡΚΠ συμπίπτει τῇ τῶν ΗΘΚ, ΑΘΡ κύκλων κοινῇ τομῇ ἐντὸς, τοῦτ' ἔστιν, ὡς κατὰ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· καὶ ὁ ΛΗΜ ἄρα κύκλος συμπεσεῖται τῇ τῶν ΗΘΚ, ΑΘΡ κύκλων κοινῇ τομῇ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὡς κατὰ τὸ Θ σημεῖον. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι μέγιστοι οἱ ΗΘΚ, ΣΘΡ τέμνουσιν ἀλλήλους, ἀπὸ δὲ ἑνὸς αὐτῶν τοῦ ΗΘΚ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΚΘ, ΘΗ ἑξῆς ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Θ σημείου, καὶ διὰ τῶν Η, Κ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα ἐκβέβληται τὰ ΛΗΜ, ΟΚΠ, ὧν τὸ ΛΗΜ συμπίπτει τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῶν ΗΘΚ, ΣΘΡ, ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὡς κατὰ τὸ Θ σημεῖον, μία δὲ τῶν ἴσων περιφερειῶν τῶν ΚΘ, ΘΗ ἑκατέρας τῶν ΡΘ, ΘΣ ἐστὶ μείζων· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΘ περιφέρεια τῆς ΘΣ περιφερείας. Ἀλλ' ἡ μὲν ΡΘ τῇ ΟΝ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΘΣ τῇ ΝΛ· καὶ ἡ ΟΝ (a) ἄρα περιφέρεια τῆς ΝΛ περιφερείας ἐστὶ μείζων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους· ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἑξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ διὰ τῶν γενομένων σημείων καὶ τοῦ πόλου μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν· ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἔγγιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς πορρώτερον.

F. 54. Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ ΑΒΓ ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ Α σημεῖον, καὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον δύο μέγιστοι κύκλοι τεμνέτωσαν πρὸς ὀρθὰς οἱ (b) ΒΖΓ, ΔΖΕ, ὧν ὁ μὲν ΒΖΓ

a) Καὶ ΟΝ *P.* et *H.*
b) ὁ *P.* et *H.*

εἷς ἔστω τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΔΖΕ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους· ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ ΔΖΕ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΚΘ, ΘΗ ἑξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ ΒΖΓ, διὰ δὲ τοῦ Α καὶ ἑκάστου τῶν Κ, Θ, Η σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΑΗΛ, ΑΘΜ, ΑΚΝ· λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΛΜ περιφέρεια τῆς ΜΝ περιφερείας.

Γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν Κ, Θ, Η σημείων παράλληλοι κύκλοι οἱ ΞΗΟ, ΠΘΡ, ΣΚΤ, μείζων ἄρα ἡ ΣΠ περιφέρεια τῆς ΠΞ περιφερείας, διὰ τὸ προδειχθὲν θεώρημα. Ἀλλ' ἡ μὲν ΣΠ τῇ ΥΘ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΠΞ τῇ ΘΦ· καὶ ἡ ΥΘ ἄρα τῆς ΘΦ ἐστι μείζων. Κείσθω οὖν τῇ ΘΦ ἴση ἡ ΘΧ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΘΚ ἴση· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Φ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ. Γεγράφθω διὰ τοῦ Χ τοῖς ἐξ ἀρχῆς παράλληλος κύκλος ὁ ΧΨΩ.

Καὶ ἐπεὶ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΨΚΝ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΧΨΩ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὁ ἄρα ΑΨΚΝ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΧΨΩ κύκλον, ὥςτε καὶ ὁ ΧΨΩ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΑΨΚΝ κύκλον. Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖΓ, ΧΨΩ ὑπό τινος ἐπιπέδου τέμνεται τοῦ ΑΨΚΝ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ ἄρα παράλληλοί εἰσιν· ἡ ἄρα κοινὴ τομὴ τῶν ΑΨΚΝ, ΒΖΓ, ἥπερ ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Ν σημείου, διάμετρος οὖσα τοῦ ΑΨΚΝ κύκλου, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ΑΨΚΝ, ΧΨΩ παράλληλοί εἰσιν, [ὥςτε ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ΑΨΚΝ, ΧΨΩ παράλληλός ἐστι τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΑΨΚΝ (a)]. Καὶ ἐπεὶ εἰς κύκλον τὸν ΑΨΚΝ διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ τῶν ΑΨΚΝ, ΧΨΩ κύκλων κοινὴ τομὴ, εἰς ἄνισα τέμνουσα τὸν ΑΨΚΝ κύκλον, παράλληλος γάρ ἐστι τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΑΨΚΝ κύκλου, καὶ ἐπ' αὐτῆς τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἐφέστηκε τὸ ΧΨ καὶ τὸ τούτῳ συνεχὲς, καὶ διῄρηται ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Χ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Ψ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Χ σημείου πρὸς τὴν ΨΚΝ περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν. Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Ψ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Κ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Κ μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Ψ, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Κ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Φ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα ἐπὶ τὸ Φ μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Ψ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΧΨΩ κύκλος ἔγγιόν ἐστι τοῦ κέντρου, ἤπερ

a) Uncis inclusa scioli glossam sapiunt, sed e medio tollere non sum ausus.

ὁ ΞΗΟ, μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ΧΨΩ κύκλος τοῦ ΞΗΟ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν δύο κύκλοι ἄνισοί εἰσιν οἱ ΧΨΩ, ΞΗΟ, καί ἐστιν ἐλάσσων ὁ ΞΗΟ, καὶ ἐν αὐτοῖς διηγμέναι εἰσὶν εὐθεῖαι, ἐν μὲν τῷ ΞΗΟ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Φ, ἐν δὲ τῷ ΧΨΩ ἡ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Ψ, καί ἐστιν ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Φ μείζων τῆς ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Ψ· ἡ ΗΦ ἄρα περιφέρεια τῆς ΧΨ περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. Ἀλλ' ἡ μὲν ΗΦ τῇ ΛΜ ἐστιν ὁμοία, ἡ δὲ ΧΨ τῇ ΜΝ ἐστιν ὁμοία· καὶ ἡ ΜΛ ἄρα περιφέρεια τῆς ΜΝ περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· μείζων ἄρα ἡ ΛΜ περιφέρεια τῆς ΜΝ περιφερείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὧν ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο· ἔτι δὲ αἱ ἁφαὶ ὦσιν ἐπὶ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἑξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων παράλληλοι κύκλοι γραφῶσιν· ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἔγγιον τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τῆς πορρώτερον.

F. 55. Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ ΑΔ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Α σημεῖον, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ ΕΖΗ, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὧν ὁ ΑΒΓ κύκλος ἐφάπτεται· ἔτι δὲ αἱ ἁφαὶ ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου κατὰ τὰ Ε, Η σημεῖα, μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἔστω ὁ ΒΖΓ· ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ (a) κύκλου τοῦ ΕΖΗ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΛΚ, ΚΘ ἑξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ ΒΖΓ, διὰ δὲ τῶν Θ, Κ, Λ σημείων παράλληλοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΜΘΝ, ΞΚΟ, ΠΛΡ· λέγω δὴ, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΠΞ περιφέρεια τῆς ΞΜ περιφερείας.

Γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ Κ σημείου τοῦ ΑΔ κύκλου ἐφαπτόμενος μέγιστος κύκλος ὁ ΔΚΣ, ὥςτε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ἀπὸ

a) δὲ λοξοῦ *P.* et *H.*

τοῦ Α ἡμικύκλιον, ὡς ἐπὶ τὰ Β μέρη (a), τῷ ἀπὸ τοῦ Δ ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὰ Σ μέρη· καὶ εἰλήφθω ὁ πόλος τῶν παραλλήλων, καὶ ἔστω τὸ Υ σημεῖον, καὶ διὰ τῶν Υ, Κ σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΥΚΦ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΥΚΦ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΠΛΡ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὁ ΥΚΦ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΠΛΡ κύκλον. Κύκλου δή τινος τοῦ ΠΛΡ ἐπὶ διαμέτρου, τῆς ἀπὸ τοῦ Φ, κύκλου τμῆμα ὀρθὸν ἐφίσταται τὸ ΦΚΥ καὶ τὸ τούτῳ συνεχές· καὶ διῄρηται ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Κ σημεῖον, καί ἐστιν ἐλάσσων ἢ ἡμίσεια ἡ ΦΚ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Φ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐλαχίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Κ σημείου πρὸς τὴν ΠΛΡ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, αἰεὶ δὲ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Σ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνυμένης εὐθείας· καί εἰσιν ἴσοι οἱ ΔΚΣ, ΕΛΗ κύκλοι, μέγιστοι γάρ εἰσι, μείζων ἄρα ἡ ΚΛ περιφέρεια τῆς ΚΣ περιφερείας. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΘΚ περιφέρεια μείζων ἐστὶ τῆς ΚΨ περιφερείας· καί ἐστιν ἴση ἡ ΘΚ τῇ ΚΛ, μία ἄρα τῶν ΘΚ, ΚΛ ἑκατέρας τῶν ΨΚ, ΚΣ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ὁ ΠΦΣΛΡ κύκλος τῷ ΜΘΝ κύκλῳ, ὁ δὲ ΠΦΣΛΡ κύκλος συμπίπτει τῇ τῶν ΘΚΛ, ΨΚΣ κοινῇ τομῇ ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καὶ ὁ ΜΘΝ ἄρα κύκλος συμπεσεῖται τῇ τῶν ΘΚΛ, ΨΚΣ κύκλων κοινῇ τομῇ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὡς κατὰ τὸ Κ σημεῖον. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΘΚΛ, ΨΚΣ τέμνουσιν ἀλλήλους κατὰ τὸ Κ σημεῖον, ἀπὸ δὲ ἑνὸς αὐτῶν τοῦ ΘΚΛ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΘΚ, ΚΛ ἐξῆς ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ σημείου, καθ᾽ ὅ τέμνουσιν ἀλλήλους, καὶ διὰ τῶν Θ, Λ σημείων παράλληλα ἐπίπεδα ἐκβέβληται τὰ ΠΛΡ, ΜΘΝ, ὧν τὸ ΜΘΝ συμπίπτει τῇ τῶν ΘΚΛ, ΨΚΣ κύκλων κοινῇ τομῇ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὡς κατὰ τὸ Κ σημεῖον, μία δὲ τῶν ΘΚ, ΚΛ περιφερειῶν μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ΣΚ, ΚΨ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΣΚ τῆς ΚΨ. Ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΣΚ τῇ ΠΞ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΚΨ τῇ ΜΞ· καὶ ἡ ΠΞ ἄρα τῆς ΞΜ (b) μείζων ἐστίν.

---

a) τὰ Β, Α μέρη *P.* et *H.*
b) ἄρα ΞΜ *P.* et *H.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος τινὸς κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἣ ὢν ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο· ἔτι δὲ αἱ ἁφαὶ ὦσιν ἐπὶ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου· ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἑξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων· διὰ δὲ τῶν γινομένων σημείων γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι ἐφαπτόμενοι, οὗ καὶ ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, ἀσύμπτωτα ποιοῦντες τὰ ἀπὸ τῶν ἐπαφῶν ἡμικύκλια, ὡς ἐπὶ τὰ μέρη τῶν σημείων, δι᾽ ὧν ἐγράφησαν, τῷ ἡμικυκλίῳ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, τῷ, ἐφ᾽ οὗ ἂν ᾖ ἡ συναφὴ τοῦ λοξοῦ κύκλου, ἡ μεταξὺ τοῦ τε φανεροῦ πόλου καὶ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων· ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἔγγιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς ποῤῥώτερον.

F. 56. Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ ΑΔ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Α σημεῖον, ἄλλος δέ τις μέγιστος ὁ ΕΖΓ λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἣ ὢν ὁ ΑΒΓ κύκλος ἐφάπτεται· ἔτι δὲ αἱ ἁφαὶ ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου κατὰ τὰ Ε, Γ σημεῖα, μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἔστω ὁ ΒΖ· ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΓ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΗΘ, ΘΚ ἑξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ ΒΖ, καὶ διὰ τῶν Η, Θ, Κ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΔΗΛ, ΜΘΝ, ΞΚΟ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΑΔ κύκλου κατὰ τὰ Δ, Μ, Ξ σημεῖα, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, ἀσύμπτωτα ποιοῦντες τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Μ, Ξ ἡμικύκλια, ὡς ἐπὶ τὰ μέρη τῶν Η, Θ, Κ, τῷ ΑΒ ἡμικυκλίῳ· λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΛΝ περιφέρεια τῆς ΝΟ περιφερείας.

Γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν Η, Θ, Κ σημείων παράλληλοι κύκλοι οἱ ΠΗΡ, ΣΘ, ΤΥΚ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΣΤ περιφέρεια τῆς ΣΠ περιφερείας. Ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΣΤ ἴση ἐστὶ τῇ ΘΥ, ἡ δὲ ΣΠ ἴση ἐστὶ τῇ ΘΡ· καὶ ἡ ΥΘ ἄρα τῆς ΘΡ μείζων ἐστί. Κείσθω οὖν τῇ ΘΡ ἴση ἡ ΘΦ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΘΚ ἴση· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Η

ἐπὶ τὸ Ρ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένη εὐθείᾳ. Γεγράφθω διὰ τοῦ Φ ὁποτέρῳ τῶν ΠΗΡ, ΣΘ, ΤΥΚ, ΒΖ παράλληλος ὁ ΧΦΨ, καὶ εἰλήφθω ὁ πόλος τῶν παραλλήλων κύκλων τὸ Ω, καὶ διὰ τῶν Ω, Ο σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΩΟ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΩΟ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΒΖ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὁ ΩΟ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΒΖ κύκλον, ὁ ΞΚΟ ἄρα πρὸς τὸν ΒΖ κέκλιται, ὡς ἐπὶ τὰ Α, Ε, Β μέρη, καὶ ὁ ΒΖ πρὸς τὸν ΞΚΟ κέκλιται, ὡς ἐπὶ τὰ Α, Ε, Β μέρη. Παράλληλος δὲ ὁ ΒΖ τῷ ΧΦΨ, καὶ ὁ ΧΦΨ ἄρα πρὸς τὸν ΞΚΟ κέκλιται, ὡς ἐπὶ τὰ Ξ μέρη. Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΧΦΨ ὑπό τινος ἐπιπέδου τοῦ λοξοῦ τέμνεται τοῦ ΞΚΟ, αἱ κοιναὶ ἄρα αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν· ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τῶν ΞΚΟ, ΒΖ ἐστιν ἡ ἀπὸ τοῦ Ο σημείου διάμετρος τοῦ ΞΚΟ κύκλου· ἡ ἄρα κοινὴ τομὴ τῶν ΞΚΟ, ΧΦΨ, ἥτις ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Ψ σημείου διηγμένη, παράλληλός ἐστι τῇ ἀπὸ τοῦ Ο διαμέτρῳ τοῦ ΞΚΟ κύκλου. Εἰς δὲ κύκλον τὸν ΞΚΟ διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ τῶν ΞΚΟ, ΧΦΨ κοινὴ τομὴ εἰς ἄνισα τέμνουσα τὸν κύκλον, παράλληλος γάρ ἐστι τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΞΚΟ κύκλου, καὶ ἐπ' αὐτῆς τμῆμα κύκλου ἐφέστηκε τὸ ΧΨ καὶ τό τούτῳ συνεχὲς, κεκλιμένον πρὸς τὸ μὴ μεῖζον ἡμικυκλίου· διῄρηται δὲ ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Φ σημεῖον, καὶ ἡ ΦΨ ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ἡμίσεια τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Ψ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Φ σημείου πρὸς τὴν μὴ ἐλάσσονα ἡμικυκλίου περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Ψ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Κ, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Κ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ρ, ὥςτε ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ρ μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Ψ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΦΧ κύκλος ἔγγιόν ἐστι τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἤπερ ὁ ΠΗΡ· μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ΧΦΨ κύκλος τοῦ ΠΗΡ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν δύο κύκλοι ἄνισοί εἰσιν οἱ ΧΦΨ, ΠΗΡ, καὶ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΠΗΡ κύκλος, καὶ ἐν αὐτοῖς διηγμέναι εἰσὶν εὐθεῖαι, ἐν μὲν τῷ ΠΗΡ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ρ, ἐν δὲ τῷ ΧΦΨ ἡ ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Ψ, καὶ ἡ ἐν τῷ ἐλάσσονι κύκλῳ διηγμένη μείζων ἐστὶ τῆς ἐν τῷ μείζονι κύκλῳ διηγμένης εὐθείας, τουτ' ἔστι, μείζων ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ρ τῆς ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Ψ· ἡ ΗΡ ἄρα περιφέρεια τῆς ΨΦ περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία· ἀλλ' ἡ μὲν ΗΡ περιφέρεια τῇ ΛΝ

περιφερείᾳ ἐστὶν ὁμοία, ἡ δὲ ΦΨ τῇ ΝΟ ἐστὶν ὁμοία· καὶ ἡ ΛΝ ἄρα μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία τῆς ΝΟ· καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΝ περιφέρεια τῆς ΝΟ περιφερείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσι μὴ οὖσαι ἑξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων κύκλου· διὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων καὶ τοῦ πόλου μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν· ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἔγγιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς πορρώτερον.

F. 57. 58. 59. Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ ΑΒΓ ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ Α σημεῖον, καὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον δύο μέγιστοι κύκλοι τεμνέτωσαν οἱ ΔΕΓ, ΒΕ πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν ΒΕ εἷς ἔστω τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΔΕΓ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους· ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ ΔΕΓ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν μὴ οὖσαι ἑξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ ΒΕ, αἱ ΖΗ, ΘΚ· καὶ διὰ τῶν Ζ, Η, Θ, Κ σημείων καὶ τοῦ Α πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΑΖΛ, ΑΗΜ, ΑΘΝ, ΑΚΞ· λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΛΜ περιφέρεια τῆς ΝΞ περιφερείας.

Ἡ γὰρ ΗΘ ταῖς ΖΗ, ΘΚ ἤτοι σύμμετρός ἐστιν, ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον σύμμετρος ἡ ΗΘ ταῖς ΖΗ ΘΚ, καὶ διῃρήσθωσαν αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ εἰς τὰ μέρη κατὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα καὶ διὰ τῶν Ο, Π, Ρ, Σ σημείων καὶ τοῦ Α πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΟΤ, ΠΥ, ΡΦ, ΣΧ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΖΟ, ΟΗ, ΗΠ, ΠΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΚ περιφέρειαι ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ ΛΤ, ΤΜ, ΜΥ, ΥΦ, ΦΝ, ΝΧ, ΧΞ ἄρα ἑξῆς ἀλλήλων μείζονές εἰσιν, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΛΤ. Ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ μὲν ΛΤ τῆς ΝΧ, ἡ δὲ ΤΜ τῆς ΧΞ· ὅλη ἄρα ἡ ΛΜ ὅλης τῆς ΝΞ μείζων ἐστί.

F. 58. Μὴ ἔστω δὴ ἡ ΗΘ ταῖς ΖΗ, ΘΚ σύμμετρος· λέγω, ὅτι ὁμοίως μείζων ἐστὶν ἡ ΛΜ περιφέρεια τῆς ΝΞ περιφερείας.

Εἰ γὰρ μὴ ἔσται μείζων, ἤτοι ἐλάσσων ἐστὶν αὐτῆς, ἢ ἴση

αὐτῇ. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατὸν, ἐλάσσων ἡ ΛΜ τῆς ΝΞ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς. Κείσθω τῇ ΛΜ ἴση ἡ ΝΟ, καὶ διὰ τοῦ Α πόλου καὶ τοῦ Ο μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΠΟ· καὶ τριῶν οὐσῶν περιφερειῶν ὁμογενῶν ἀνίσων τῶν ΚΘ, ΘΠ, ΗΘ εἰλήφθω τις περιφέρεια ἡ ΘΡ, μείζων μὲν οὖσα τῆς ΘΠ, ἐλάσσων δὲ τῆς ΘΚ (a), σύμμετρος δὲ τῇ ΗΘ· καὶ κείσθω τῇ ΘΡ ἴση ἡ ΣΗ καὶ διὰ τῶν Σ, Ρ σημείων καὶ διὰ τοῦ Α πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΣΤ, ΡΥ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΣΗ τῇ ΘΡ, ἡ ΤΜ ἄρα τῆς ΝΟ μείζων ἐστί· τῆς δὲ ΤΜ ἡ ΛΜ μείζων ἐστὶ, πολλῷ ἄρα ἡ ΜΛ τῆς ΝΟ μείζων ἐστίν· ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΛΜ τῆς ΝΞ.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΝΞ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΖΗ, ΘΚ δίχα κατὰ τὰ Ο, Π σημεῖα, καὶ διὰ τῶν Ο, Π σημείων καὶ τοῦ Α πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΟΡ, ΠΣ. F. 59.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΖΟ, ΟΗ ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ ἄρα ΛΡ, ΡΜ ἑξῆς ἀλλήλων μείζονές εἰσιν, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΛΡ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΡ τῇ ΡΜ, ἡ ἄρα ΛΜ τῆς ΜΡ μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΘΠ, ΠΚ ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ ΝΣ, ΣΞ ἄρα ἑξῆς ἀλλήλων μείζους εἰσὶν, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΝΣ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΣ τῆς ΣΞ, ὥστε ἡ ΞΝ τῆς ΝΣ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΝΞ, ὧν ἡ ΛΜ τῆς ΜΡ μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ, ἡ δὲ ΞΝ τῆς ΝΣ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΡΜ τῆς ΝΣ, ἴσων ὑποκειμένων τῶν ΟΗ, ΘΠ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΝΞ· ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ περιφέρεια τῆς ΝΞ περιφερείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους· ἐπὶ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν σημείων καὶ τοῦ

a) δὲ ΘΚ *P.* et *H.*

πόλου τῶν παραλλήλων μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν· ἔσται, ὡς ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου καὶ τοῦ ἑξῆς διὰ τῶν πόλων, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων, οὕτως ἡ ἑξῆς τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τῶν διὰ τοῦ πόλου μεγίστων κύκλων καὶ τῶν ληφθέντων σημείων, πρὸς ἐλάσσονά τινα περιφέρειαν τῆς τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφερείας, τῆς μεταξὺ τῶν ληφθέντων δύο σημείων.

F. 60. Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ ΑΒΓ ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ Α σημεῖον, καὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον δύο τεμνέτωσαν μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς οἱ ΔΕΓ, ΒΕ, ὧν ὁ μὲν ΒΕ εἷς ἔστω τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΔΕΓ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους· ἐπὶ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ ΔΕΓ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ ΒΕ, καὶ διὰ τῶν Ζ, Η σημείων καὶ τοῦ πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΑΖΘ, ΑΗΚ· λέγω, ὅτι ἔστιν, ὡς ἡ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΖ περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΘΚ περιφέρεια πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΖΗ περιφερείας.

Ἤτοι γὰρ ἡ ΖΗ τῇ ΔΖ σύμμετρός ἐστιν, ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον σύμμετρος, καὶ διῃρήσθωσαν εἰς τὰ μέρη αἱ ΔΖ, ΗΖ κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ διὰ τῶν Λ, Μ, Ν καὶ πόλου τοῦ Α μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΑΞ, ΜΟ, ΝΠ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΛ, ΜΛ, ΜΖ, ΖΝ, ΝΗ ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ ΒΞ, ΞΟ, ΟΘ, ΘΠ, ΠΚ ἄρα ἑξῆς ἀλλήλων μείζονές εἰσιν, ἀρχόμεναι ἀπὸ τῆς μεγίστης τῆς ΒΞ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΒΞ, ΞΟ, ΟΘ, ΘΠ, ΠΚ ἑξῆς μείζους ἀλλήλων εἰσὶν, αἱ δὲ ΔΛ, ΛΜ, ΜΖ, ΖΝ, ΝΗ ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἔτι τὸ μὲν πλῆθος τῶν ΒΞ, ΞΟ, ΟΘ ἴσον τῷ πλήθει τῶν ΔΛ, ΛΜ, ΜΖ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ΘΠ, ΠΚ ἴσον τῷ πλήθει τῶν ΖΝ, ΝΗ· ἡ ΒΘ ἄρα πρὸς τὴν ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΖΗ. Ἐὰν ἄρα ποιῶμεν, ὡς τὴν ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτω τὴν ΘΚ πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΖΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΖ περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ἐλάσσονά τινα περιφερείαν τῆς ΖΗ.

F. 61. Μὴ ἔστω δὴ ἡ ΖΗ τῇ ΔΖ σύμμετρος· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἔστιν, ὡς ἡ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΖ περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΘΚ περιφέρεια πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΖΗ περιφερείας.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι πρὸς μείζονα τῆς ΖΗ ἔσται, ἢ πρὸς αὐτήν. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατὸν, πρὸς μείζονα τῆς ΖΗ τὴν ΛΖ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς· καὶ τριῶν οὐσῶν ἀνίσων περιφερειῶν τῶν ΛΖ, ΖΗ, ΖΔ εἰλήφθω τις περιφέρεια ἡ ΖΜ τῆς μὲν ΖΛ οὖσα ἐλάσσων, τῆς δὲ ΖΗ μείζων, σύμμετρος δὲ τῇ ΖΔ· καὶ διὰ τοῦ Μ καὶ τοῦ Α πόλου μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΜΝ.

Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΖΜ τῇ ΖΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΝ πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΖΜ. Ὡς δὲ ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΖΛ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΘΝ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΖΜ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΘΝ, οὕτως ἡ ΖΛ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΖΜ. Ἐλάσσων δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΘΝ, ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΛΖ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΖΜ· ἀλλὰ καὶ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἔστιν, ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς μείζονά τινα περιφέρειαν τῆς ΖΗ περιφερείας.

Λέγω, ὅτι οὐδὲ πρὸς αὐτήν.

Εἰ γὰρ δύνατον, ἔστω ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΚ F. 62.
πρὸς τὴν ΖΗ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΔΖ, ΖΗ δίχα κατὰ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ δι' ἑκατέρου τῶν Λ, Μ σημείων καὶ τοῦ Α πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΛΝ, ΜΞ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΛ, ΛΖ ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ ΒΝ, ΝΘ ἄρα ἑξῆς μείζους εἰσὶν ἀλλήλων, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΒΝ· ἡ ΒΘ ἄρα τῆς ΘΝ μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΚΘ τῆς ΘΞ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΒΘ τῆς ΘΝ μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ, ἡ δὲ ΚΘ τῆς ΘΞ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ· ἡ ΒΘ ἄρα πρὸς τὴν ΘΝ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΞ· καὶ ἐναλλὰξ ἡ ΒΘ ἄρα πρὸς τὴν ΘΚ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΝΘ πρὸς τὴν ΘΞ. Ὡς δὲ ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΗ· ἡ ΝΘ ἄρα πρὸς τὴν ΘΞ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΗ. Ὡς δὲ ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΖΜ· ἡ ΝΘ ἄρα πρὸς τὴν ΞΘ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ἐναλλὰξ ἡ ΝΘ ἄρα πρὸς τὴν ΛΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΘΞ πρὸς τὴν ΖΜ. Ἐὰν ἄρα ποιῶμεν, ὡς τὴν ΝΘ πρὸς τὴν ΛΖ, οὕτως ἡ ΘΞ πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ΖΜ περιφερείας, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. Οὐκ ἄρα ἔστιν ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΖΗ· ἐδείχθη δὲ, ὅτι καὶ οὐδὲ πρὸς μείζονα· πρὸς ἐλάσσονα ἄρα. Ἔστιν

ἄρα ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ἐλάσσονα τῆς ΖΗ (a).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια΄. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος, διὰ τῶν πόλων ὢν τῶν παραλλήλων, τέμνῃ τὸν λοξὸν κύκλον μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων καὶ οὗ ὁ λοξὸς ἐφάπτεται· ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, οὗ ἐφάπτεται ὁ λοξὸς κύκλος, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τοῦ τε ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου καὶ τοῦ ἐξῆς διὰ πόλων, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων.

F. 63. Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ ΑΒΓ ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων, τὸ Α σημεῖον, καὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τεμνέτωσαν δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς οἱ ΒΕΓ, ΔΕΖ, ὧν ὁ μὲν ΒΕΓ μέγιστος τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΔΕΖ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους (b)· ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ ΑΗΚ διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων τεμνέτω τὸν ΔΕΖ μεταξὺ τοῦ τε ΒΕΓ καὶ οὗ ἐφάπτεται ὁ ΔΕΖ· οὗ δὲ ἐφάπτεται ὁ ΔΕΖ, ἔστω ὁ ΔΛΜ· λέγω, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ ΔΛΜ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΗ περιφέρειαν.

Γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ Η παράλληλος κύκλος ὁ ΝΗΞ, καὶ ἔστωσαν κοιναὶ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων αἱ ΑΚ, ΔΖ, ΒΓ, ΝΞ, ΔΜ, ΘΟ, ΗΠ, ΟΗ (c), ΗΡ.

---

a) Fortasse legendum πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΖΗ.

b) In ambabus horum sphaericorum editionibus vitiose descripta forma est, circulo maximo ΔΕΖ ita ducto, ut non transeat per sphaerae centrum Ο, sed per punctum quoddam elemento Υ denotatum et inter Ο et Π positum. Inde factum est, ut in ipsam demonstrationem bina elementa Ο, Υ loco unius Ο irrepserint. Ego vero tam re ipsa motus, quam auctoritate Arabis, Clavii, Barrowii ac Dechalesii fretus reponendo elementum Ο sustuli ubivis mendosum Υ.

c) ΥΗ *P.* et *H.*

Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτοὺς τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· αἱ ΔΜ, ΝΞ, ΒΓ ἄρα διάμετροί εἰσι τῶν ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ κύκλων, καὶ ὁ ΑΒΓ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ κύκλων. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι εἰσὶν οἱ ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν εὐθεῖά τις διῆκται ἡ ΑΚ· ἡ ΑΚ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ κύκλων, καὶ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν τε καὶ τῆς σφαίρας ἐστί· τὰ Σ, Π, Ο ἄρα σημεῖα κέντρα ἐστὶ τῶν ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ κύκλων. Καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ ὑπό τινος ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ τομαὶ ἄρα αὐτῶν παράλληλοί εἰσιν· αἱ ἄρα ΔΜ, ΝΞ, ΒΓ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλοις. Πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΝΗΖ, ΒΕΓ ὑπό τινος ἐπιπέδου τοῦ ΑΗΚ τέμνεται, αἱ κοιναὶ ἄρα αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΠ τῇ ΘΟ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΝΠ, ΠΗ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΒΟ, ΟΘ εἰσι, μὴ οὖσαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέχουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΝΠΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΟΘ γωνίᾳ. Καὶ ἐπεὶ οἱ ΝΗΞ, ΔΕΖ ὀρθοί εἰσι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον, καὶ ἡ τῶν ΝΗΞ, ΔΕΖ ἄρα κοινὴ τομὴ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐστὶν ὀρθή. Κοινὴ δὲ αὐτῶν τομή ἐστιν ἡ ΗΡ· καὶ ἡ ΗΡ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ τῆς ΗΡ ἑκατέρα τῶν ΠΡ, ΡΟ (*a*), οὖσα ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΗΡΠ, ΗΡΟ (*b*) γωνιῶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΚ τῇ ΝΞ ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ ΡΠΟ (*c*) γωνία ὀρθή ἐστιν. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΡΠΟ (*d*) ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΠΟΡ (*e*)· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΡ (*f*) τῆς ΡΠ. Κείσθω οὖν τῇ ΠΡ ἴση ἡ ΡΤ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΤ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΠΡ τῇ ΡΤ, κοινὴ δὲ ἡ ΗΡ, δύο δὴ αἱ ΠΡ, ΡΗ δυσὶ ταῖς ΤΡ, ΡΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΡΗ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΤΡΗ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΗΠ τῇ ΗΤ ἴση ἐστί, καὶ

a) ΡΥ *P.* et *H.*
b) ΗΡΥ *P.* et *H.*
c) ΡΠΥ *P.* et *H.*
d) ΡΠΥ *P.* et *H.*
e) ΠΥΡ *P.* et *H.*
f) ΥΡ *P.* et *H.*

τὸ ΠΡΗ τρίγωνον τῷ ΤΡΗ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΠΡ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΤΡ γωνίᾳ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΠΡ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΟΒ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΤΡ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΘΟΒ ἐστιν ἴση. Καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΗΟΡ (*a*), ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Ρ γωνίαν, καὶ διῆκταί τις ἡ ΗΤ· ἡ ΟΡ (*b*) ἄρα πρὸς τὴν ΡΤ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ ΡΤΗ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΡΟΗ (*c*) γωνίαν. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΡΤ τῇ ΡΠ, ἡ δὲ ὑπὸ ΡΤΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΟΒ· καὶ ἡ ΟΡ (*d*) ἄρα πρὸς τὴν ΡΠ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ ΒΟΘ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΡΟΗ (*e*) γωνίαν. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΡΟ (*f*) πρὸς τὴν ΡΠ, οὕτως ἐστιν ἡ ΟΔ (*g*) πρὸς τὴν ΔΣ, τοῦτ' ἔστιν, ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΜ, ὡς δὲ ἡ ὑπὸ ΒΟΘ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΡΟΗ (*h*) γωνίαν, οὕτως ἐστιν ἡ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΗ περιφέρειαν· καὶ ἡ ΖΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΜ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΗ περιφέρειαν. Καί ἐστιν ἡ μὲν ΔΖ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ δὲ ΔΜ διάμετρος τοῦ ΔΛΜ κύκλου· ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ ΔΛΜ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΗ περιφέρειαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβʹ. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφάπτωνται, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν (i) παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὧν οἱ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτοντο, καὶ τέμνῃ τοὺς τοῦ αὐτοῦ ἐφαπτομένους μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων καὶ οὗ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτοντο· ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς

---

a) ΗΤΡ *P.* et *H.*
b) ΤΡ *P.* et *H.*
c) τὴν ΡΤΗ *P.* et *H.*
d) ΤΡ *P.* et *H.*
e) ΡΤΗ *P.* et *H.*
f) ΡΤ *P.* et *H.*
g) ΤΔ *P.* et *H.*
h) ΡΤΗ *P.* et *H.*
i) ἀφαιροῦντες τῶν *P.*

τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, οὗ ἐφάπτεται ὁ λοξὸς κύκλος, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τῶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἐφαπτομένων, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι οἱ **ΑΒ, ΓΔ** τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτέσθωσαν τοῦ **ΑΓ** κατὰ τὰ **Α, Γ** σημεῖα, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν· ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, ὁ **ΕΖ**, μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὧν οἱ **ΑΒ, ΓΔ** ἐφάπτονται, καὶ τεμνέτω ὁ **ΕΖ** τοὺς **ΑΒ, ΓΔ** μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ οὗ οἱ **ΑΒ, ΓΔ** ἐφάπτονται, τοῦ **ΑΓ** κύκλου. Ἔστω δὲ μέγιστος μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων ὁ **ΜΒΞ**, οὗ δὲ ἐφάπτεται ὁ **ΕΖ**, ἔστω ὁ **ΕΗ**· λέγω, ὅτι ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ **ΕΗ** κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ **ΒΔ** περιφέρεια πρὸς τὴν **ΘΚ** περιφέρειαν. **F. 64.**

Ἔστω γὰρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων τὸ **Λ** σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ **Λ** καὶ ἑκάστου τῶν **Ε, Θ, Κ** σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ **ΛΕΜ, ΛΘΝ, ΛΚΞ**, διὰ δὲ τοῦ **Κ** παράλληλος κύκλος γεγράφθω ὁ **ΟΚ**, διὰ δὲ τοῦ **Θ** μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ **ΘΠ**, ἐφαπτόμενος τοῦ **ΕΗ** κύκλου κατὰ τὸ **Π**.

Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο παράλληλοί εἰσι κύκλοι οἱ **ΟΚ, ΕΠΗ**, καὶ γεγραμμένοι εἰσὶ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ **ΕΘΚΖ, ΟΘΠ**, ἐφαπτόμενοι τοῦ **ΕΠΗ** κατὰ τὰ **Ε, Π**, διὰ δὲ τοῦ **Θ** σημείου καὶ τοῦ πόλου τοῦ **Λ** μέγιστος γέγραπται κύκλος ὁ **ΛΘΡ**· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ **ΟΡ** τῇ **ΡΚ**, καὶ ἡ **ΡΣ** ἄρα τῆς **ΡΚ** ἐλάσσων ἐστὶν, ἡ **ΣΚ** ἄρα τῆς **ΚΡ** ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Ἀλλ' ἡ μὲν **ΣΚ** τῇ **ΒΔ** ἐστὶν ὁμοία, ἡ δὲ **ΚΡ** τῇ **ΝΞ**· καὶ ἡ **ΒΔ** ἄρα τῆς **ΝΞ** ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ **ΕΗ** κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ **ΜΝ** περιφέρεια πρὸς τὴν **ΕΘ** περιφέρειαν, ἔχει δὲ καὶ ἡ **ΜΝ** περιφέρεια πρὸς τὴν **ΕΗ** περιφέρειαν μείζονα λόγον, ἤπερ ἡ **ΝΞ** περιφέρεια πρὸς τὴν **ΘΚ** περιφέρειαν· καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ **ΕΠΗ** κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ **ΝΞ** περιφέρεια πρὸς τὴν **ΘΚ** περιφέρειαν· καὶ η ἄρα διπλασίων (a) τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ **ΕΠΗ** κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς **ΝΞ** περιφε-

a) τὸ ἄρα διπλασιον *P.* et *H.*

ρείας διπλῆ πρὸς τὴν ΘΚ περιφέρειαν· ἡ δὲ τῆς ΝΞ περιφερείας διπλῆ πρὸς τὴν ΘΚ περιφέρειαν μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΘΚ, ἡ γὰρ τῆς ΝΞ διπλῆ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΔ. Πολλῷ ἄρα ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ ΕΠΗ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΘΚ περιφέρειαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ΄. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶσι μεγίστου τινὸς κύκλου πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι, ἢ διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων, ἢ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτόμενοι· ἴσας ἀπολήψονται περιφερείας ἀπὸ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν.

F. 65. Ἐν γὰρ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ ΑΔ περιφερείας τὰς ΑΕ, ΕΔ ἴσας ἀφαιρείσθωσαν πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ΖΕΗ, καὶ διὰ τῶν Α, Ε, Δ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΑΖΓ, ΘΕΚ, ΒΗΔ, ἤτοι διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων, ἢ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτόμενοι· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΖΕ περιφέρεια τῇ ΕΗ περιφερείᾳ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ ΑΕΔ περιφερείας τὰς ΑΕ, ΕΔ ἴσας ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ΖΗ, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒ κύκλος τῷ ΓΔ κύκλῳ. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ ΘΚ περιφερείας τὰς ΘΕ, ΕΚ ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ΖΗ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ τῇ ΕΚ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἴση· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἄρα ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ. Καί εἰσιν ἴσοι οἱ κύκλοι, ἡ ΑΘ ἄρα περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΚΔ περιφερείᾳ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ περιφέρεια τῇ ΚΔ περιφερείᾳ. Ἀλλ' ἡ μὲν ΑΘ τῇ ΖΕ ἐστιν ὁμοία, ἡ δὲ ΚΔ τῇ ΕΗ ἐστιν ὁμοία· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΗ περιφερείᾳ ὁμοία ἐστί. Καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ περιφέρεια τῇ ΕΗ περιφερείᾳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ΄. ΘΕΩΡ.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν

ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὧν ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο· ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονες ἢ ὅμοιαι ἔσονται αἰεὶ αἱ ἔγγιον ὁποτερουοῦν τῶν πόλων τῆς ποῤῥώτερον.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ ΑΔΞ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Α σημεῖον, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ ΒΕΓ, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὧν ὁ ΑΒΓ ἐφάπτεται· λέγω, ὅτι ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν· καὶ μείζονες ἢ ὅμοιαι ἔσονται αἰεὶ αἱ ἔγγιον ὁποτερουοῦν τῶν πόλων τῆς ποῤῥώτερον. F. 66.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ ΒΓ δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Κ, καὶ τῶν Ε, Κ σημείων τῷ ΑΔΞ κύκλοι παράλληλοι γεγράφθωσαν οἱ ΖΕΗ, ΘΜΛ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ΕΗ περιφέρεια τῆς ΚΛ περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, ἡ δὲ ΘΚ περιφέρεια τῆς ΖΕ περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία.

Γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν Ε, Κ σημείων μέγιστοι κύκλοι οἱ ΔΕΜ, ΞΝΚ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΑΔΞ, ὥςτε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ Δ ἡμικύκλιον, ὡς ἐπὶ τὰ Μ μέρη, τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὰ Θ μέρη, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ Ξ ἡμικύκλιον, ὡς ἐπὶ τὰ Κ μέρη, τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὰ Λ μέρη.

Ἐπεὶ οὖν ἀσύμπτωτά ἐστι τὰ ΑΛ, ΞΚ ἡμικύκλια, καὶ μεταξὺ αὐτῶν κύκλων παραλλήλων περιφέρειαί εἰσιν αἱ ΝΗ, ΚΛ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΗ περιφέρεια τῇ ΚΛ περιφερείᾳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΘΜ ἐστιν ὁμοία· καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΝΗ περιφέρεια τῇ ΚΛ περιφερείᾳ, ἡ ἄρα ΕΗ περιφέρεια τῆς ΚΛ περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΖΕ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theodosii Sphaericorum

Liber primus.

Definitiones.

1. *Sphaera est figura solida ab una superficie contenta, ad quam rectae cadentes ab uno puncto eorum, quae intra figuram posita sunt, inter se aequales sunt omnes.*

2. *Centrum sphaerae est eiusmodi punctum.*

3. *Axis sphaerae est recta quaedam per centrum ducta, et utrinque terminata in sphaerae superficie, circum quam quiescentem circumvolvitur sphaera.*

4. *Poli sphaerae sunt extrema puncta ipsius axis sive diametri.*

5. *Polus circuli in sphaera est punctum in superficie sphaerae, a quo in circuli ambitum pertinentes rectae omnes sunt inter se aequales* (*a*).

6. *Planum ad planum dicitur similiter inclinari, atque alterum ad alterum, quando rectae, in utroque plano planorum intersectioni ad angulos rectos ductae, in iisdem punctis angulos aequales comprehendant.*

---

a) F. 1. a. Nam si omnes rectae ex puncto Π ad circuli ΒΓΑ ambitum ductae aequales sint inter se, punctum Π polus erit circuli ΒΓΑ, at contra si punctum Π polus sit, omnes rectae ΠΓ inter se aequales erunt.

Ceterum de his definitionibus conferendus est Hero Alex. def. geom. XII ed. Hasenbalg.

Propositio 1. Theorema.

Si sphaerica superficies plano aliquo secetur, linea, quae fit in sphaerae superficie, circuli ambitus est.

Secetur enim plano aliquo sphaerica superficies, faciatque in superficie sphaerae lineam ΑΒΓ; dico, lineam ΑΒΓ esse circuli ambitum. F. 1.

Nam si planum secans per sphaerae centrum transit, lineam ΑΒΓ ambitum circuli esse perspicuum est; quae enim rectae a sphaerae centro ad superficiem ducuntur, inter se aequales sunt, et linea ΑΒΓ est in superficie sphaerae; ergo rectae, quae a centro sphaerae ad lineam ΑΒΓ ducuntur, inter se aequales sunt. Sed positum est, planum ΑΒΓ per centrum sphaerae transire, ergo linea ΑΒΓ est ambitus circuli, cuius centrum idem est quod sphaerae.

Corollarium 1. *Atque hinc patet, idem esse centrum sphaerae, quod circuli per centrum sphaerae ducti.*

At planum secans iam non transeat per centrum sphaerae, sed centrum sphaerae sit punctum Δ, et ex puncto Δ demittatur ad planum secans perpendicularis ΔΕ (*E.* II, 11), quae cum plano concurrat in puncto E, et a puncto E ad lineam ΑΒΓ pertineant rectae EA, EB, iunganturque rectae ΔΑ, ΔΒ.

Igitur quoniam est $A\Delta = \Delta B$, et $A\Delta^2 = AE^2 + E\Delta^2$, et $\Delta B^2 = BE^2 + E\Delta^2$, uterque enim angulorum ad punctum E positorum rectus est; ergo $AE^2 + E\Delta^2 = BE^2 + E\Delta^2$ et demto communi ΔE^2 sequitur $AE = EB$. Similiter etiam ostendemus, rectas omnes a puncto E ad lineam ΑΒΓ pertinentes aequales esse inter se; igitur linea ΑΒΓ est circuitus circuli, cuius centrum est E.

Corollarium 2. *Atque hinc evidens est, si in sphaera sit circulus, perpendicularem a centro sphaerae in circuli planum demissam casuram esse in centrum circuli.*

Propositio 2. Problema.

Datae sphaerae centrum invenire.

Sit data sphaera, oportet centrum eius invenire.

Secetur sphaera data plano aliquo, intersectionem efficiet F. 2.

circulum. Faciat circulum ΑΒΓ, et sumatur centrum eius, quod sit punctum Δ (*E.* III, 1.), et a puncto Δ erigatur ΔE ad rectos angulos plano circuli ΑΒΓ (*E.* XI, 11), quae producta concurrat cum superficie sphaerae in punctis E, Z, et secetur EZ bifariam in puncto H; dico, punctum H centrum esse sphaerae.

Non enim, sed, si fieri potest, sit centrum Θ, et a puncto Θ ducatur perpendicularis ad planum circuli ΑΒΓ, quae concurrat cum plano in puncto K; ergo punctum K centrum est circuli ΑΒΓ (1. *Cor.* 2), sed etiam punctum Δ; quod fieri non potest. Igitur punctum Θ non est centrum sphaerae. Similiter etiam ostendemus, neque aliud praeter H; ergo punctum H est centrum sphaerae (*a*).

Corollarium. *Hinc perspicuum est, si in sphaera circulus sit, a centro autem eius erigatur recta ad rectos angulos plano eiusdem, in erecta centrum esse sphaerae.*

Propositio 3. Theor.

Sphaera planum non secans non attingit in pluribus punctis, quam in uno.

F. 3. Si enim fieri potest, sphaera planum non secans tangat in pluribus punctis, ut in A, B. Sumatur centrum sphaerae punctum Γ (2) et iungantur rectae ΑΓ, ΒΓ, et producatur planum rectarum ΑΓ, ΒΓ; ergo intersectionem faciet in superficie sphaerae circuitum circuli (1), in plano autem rectam (*E.* XI, 3). Faciat igitur in sphaerae quidem superficie circulum ΔAB, in plano autem rectam EABZ.

Et quoniam planum non secat sphaeram, est autem in sphaerae superficie circulus, in plano linea recta; ergo recta

a) Evidentius fortasse sic exprimitur: Quoniam recta EH = HZ posita est, non aliud punctum praeter H bifariam secat rectam EZ, proinde centrum sphaerae aut est punctum H (*Def.* 1), aut omnino non exsistit in recta EZ. Ideo centrum sphaerae sit non in recta EZ, sed extra eam punctum Θ utcunque positum. Iam demittatur perpendiculum ΘK ad planum circuli ΑΒΓ, erit ΘK ∦ EZ, ergo Δ et K necessario sunt diversa duo puncta. Sed punctum Δ positum est centrum circuli ΑΒΓ, et punctum K itidem est centrum huius circuli (1. *Cor.* 2,), idque repugnat; ergo punctum Θ non est centrum sphaerae.

EABZ non secat circulum ΔAB. Quoniam igitur in circuli ΔAB ambitu sumta sunt duo quaelibet puncta A, B, recta ab A ad B ducta cadet intra circulum ΔAB (*E.* III, 2), sed etiam extra; quod fieri nequit. Quare sphaera planum non secans non attinget in pluribus punctis, quam in uno.

Propositio 4. Theor.

Si sphaera planum non secans tangat, recta a centro sphaerae ad contactum ducta perpendicularis est ad planum.

Sphaera enim planum non secans tangat in puncto A, F. 4. et sumatur punctum B centrum sphaerae, iungaturque BA; dico, hanc esse perpendicularem ad planum.

Producatur enim planum per rectam AB, intersectionem faciet in superficie quidem sphaerae circulum, in plano autem rectam. Faciat igitur in superficie quidem sphaerae circulum AΓΔ, in plano autem rectam EAZ. Rursus aliud planum producatur per rectam AB, et intersectionem faciat in sphaerae superficie circulum AΘ, in plano autem rectam KAΛ.

Et quoniam planum contingit sphaeram, recta EAZ contingit circulum AΓΔ. Quoniam igitur recta quaedam EAZ circulum AΓΔ in puncto A contingit, ducta vero est recta AB a puncto A ad centrum; ergo AB perpendicularis est ad EAZ (*E.* III, 18), et manifestum est, punctum B centrum esse circuli AΓΔ, propterea quod planum circuli AΓΔ productum est per rectam BA, sphaerae radium. Similiter etiam ostendemus, BA perpendicularem esse ad KAΛ. Quoniam itaque recta BA duabus rectis EZ, KΛ se invicem secantibus in communi intersectione ad angulos rectos insistit, plano etiam per illas producto ad rectos angulos est ipsa BA (*E.* XI, 4). Sed planum per EZ, KΛ productum contingens est; ergo recta AB ad angulos rectos est plano sphaeram contingenti.

Propositio 5. Theor.

Si sphaera tangat planum non secans, a contactu autem erigatur recta plano ad perpendiculum, in erecta erit centrum sphaerae.

Sphaera enim planum non secans tangat in puncto A, F. 5.

et a puncto A plano ad rectos angulos erigatur AB; dico, in recta AB esse centrum sphaerae.

Non enim, sed, si fieri potest, sit centrum Γ, et iungatur ΓA.

Quoniam igitur sphaera planum non secans tangit in puncto A, a centro autem sphaerae ad contactum iuncta est ΓA, perpendicularis est ΓA ad planum (4); est autem et BA perpendicularis ad planum; igitur ex eodem puncto A eidem plano subjecto duae rectae AB, AΓ ad rectos angulos erectae sunt, quod fieri non potest (*E.* XI, 13); ergo non est punctum Γ centrum sphaerae. Similiter iam ostendemus, non aliud etiam praeter punctum in recta BA. Igitur in BA est centrum sphaerae.

Propositio 6, A. Theor.

Circulorum in sphaera maximi quidem sunt, qui per centrum sphaerae transeunt; aliorum vero aequales, qui aequaliter distant ad quamcunque partem a centro, minores autem, qui magis.

F. 6. Sint in sphaera circuli AB, ΓΔ, EZ, et ΓΔ quidem sit per centrum descriptus, AB, EZ autem primum aequaliter distent a centro; dico, maximum esse ΓΔ, aequales vero AB, EZ.

Sumatur enim centrum sphaerae punctum H, idem igitur est centrum circuli ΓΔ, et ducantur a puncto H ad plana circulorum AB, EZ perpendiculares HΘ, HK, quae concurrant cum circulorum planis in punctis Θ, K. Ergo puncta Θ, K centra sunt circulorum AB, EZ (1, *Cor.* 2). Producantur a punctis Θ, H, K ad circulos rectae ΘΛ, HM, KN, et iungantur HΛ, HN.

Et quoniam HΘ perpendicularis est ad planum circuli AB, cum omnibus etiam illi occurrentibus et positis in plano circuli AB rectos angulos faciet (*E.* XI, *Def.* 3). Sed occurrit illi recta ΘΛ, quae est in plano AB, ergo angulus ΛΘH rectus est. Similiter iam ostendemus, angulum HKN etiam esse rectum. Et quoniam HΘΛ rectus, ΛHΘ minor est recto (*E.* I, 17), igitur $\Lambda\Theta H > \Lambda H\Theta$, quare $\Lambda H > \Lambda\Theta$ (*E.* I, 19). Est vero $\Lambda H = HM$, eo quod punctum H centrum sphaerae est, et quod ab eo ad superficiem sphaerae pertinent rectae

$\Lambda H, HM$; igitur $HM > \Lambda\Theta$. Sed HM est radius circuli $\Gamma\Delta$, et $\Lambda\Theta$ circuli AB, ergo circulus $\Gamma\Delta$ circulo AB maior est. Similiter iam ostendemus, eum esse maiorem quoque omnibus in sphaera circulis per centrum sphaerae non transeuntibus.

Iam dico, et circulos AB, EZ aequales esse. Nam quoniam circuli AB, EZ aequaliter distant a centro sphaerae, consequens est, esse $H\Theta = HK$; et quoniam punctum H centrum est sphaerae, sequitur $H\Lambda = HN$, ergo et

$$\Lambda H^2 = HN^2$$
$$\text{sed est } \Lambda H^2 = \Lambda\Theta^2 + \Theta H^2$$
$$\text{et } HN^2 = HK^2 + KN^2$$
$$\text{itaque } \Lambda\Theta^2 + \Theta H^2 = HK^2 + KN^2;$$
$$\text{est autem } \Theta H^2 = HK^2$$
$$\text{igitur reliquum } \Theta\Lambda^2 = KN^2, \text{ quare } \Theta\Lambda = KN.$$

Atqui est $\Theta\Lambda$ radius circuli AB, et KN radius circuli EZ, ergo radius circuli AB aequalis est radio circuli EZ, igitur *circ.* AB = *circ.* EZ.

Rursus autem magis distet circulus AB a centro sphae- F. 7.
rae, quam circulus EZ; dico, circulum AB minorem esse circulo EZ.

Etenim iisdem constructis quum circulus AB magis distet a centro sphaerae, quam circulus EZ, consequens est, esse $\Theta H > HK$. Et quoniam $H\Lambda = HN$, nam punctum H centrum sphaerae est, et Λ, N in superficie sita sunt, sequitur $H\Lambda^2 = HN^2$, hoc est

$$\Lambda\Theta^2 + \Theta H^2 = HK^2 = KN^2,$$
$$\text{est etiam } \Theta H^2 > KH^2$$
$$\text{igitur reliquum } \Lambda\Theta^2 < NK^2, \text{ quare } \Lambda\Theta < NK.$$

Atqui est $\Theta\Lambda$ radius circuli AB, et KN radius circuli EZ, ergo est *circ.* AB < *circ.* EZ.

Itaque circulorum in sphaera maximi quidem sunt, qui per sphaerae centrum transeunt; aliorum vero aequales, qui aequaliter distant a centro sphaerae, minores autem, qui magis.

Propositio 6, B. Theor.

Ostendemus autem e converso, circulorum in sphaera maximos quidem transire per centrum; aliorum vero aequales aequaliter distare ad quamcunque partem a centro, minores autem magis.

F. 6. Etenim iisdem constructis sit ΓΔ circulus maximus; dico, transiturum esse eum per centrum sphaerae.

Si enim fieri potest, non transeat per centrum sphaerae. Et quoniam ostensum est, circulum per centrum transeuntem maiorem esse quolibet circulorum non transeuntium per centrum, circulus, qui per centrum transit, maior erit quam *circ.* ΓΔ; quare *circ.* ΓΔ non erit maximus, id quod absurdum est, ponitur enim maximus. Igitur maximus circulus ΓΔ per centrum sphaerae transit.

Rursum sint aequales circuli AB, EZ; dico, aequaliter eos distare a centro sphaerae.

Quoniam enim aequales sunt, sequitur $\Theta\Lambda = KN$ (*E.* III, *Def.* 1). Sed est etiam $H\Lambda = HN$, et

$$H\Lambda^2 = \Lambda\Theta^2 + \Theta H^2$$
$$HN^2 = HK^2 + KN^2,$$

est autem $\Lambda\Theta^2 = NK^2$

quocirca reliquum $H\Theta^2 = HK^2$, quare $\Theta H = HK$.

Igitur aequaliter distant a centro sphaerae circuli aequales.

F. 7. Sed rursus iam circulus AB minor sit circulo EZ; dico, magis distare a centro sphaerae circulum AB, quam circulum EZ.

Quoniam enim $AB < ZE$, sequitur $\Theta\Lambda < KN$, et quoniam est

$$H\Lambda^2 = \Lambda\Theta^2 + \Theta H^2$$
$$HN^2 = NK^2 + KH^2$$

ergo est $\Lambda\Theta^2 + \Theta H^2 = NK^2 + KH^2$,

est autem $\Lambda\Theta^2 < NK^2$

igitur reliquum $\Theta H^2 > HK^2$, quare $\Theta H > HK$.

Itaque circuli minores magis distant a centro sphaerae.

Propositio 7. Theor.

Si circulus sit in sphaera, a centro autem sphaerae ad centrum eius recta quaedam iungatur, iuncta perpendicularis est ad circulum.

F. 8. Si in sphaera circulus ABΓΔ, et centrum quidem sphaerae sit punctum E, circuli autem centrum sit Z, et iungatur EZ; dico, EZ esse perpendicularem ad circulum ABΓΔ.

Ducantur enim per centrum circuli rectae AZΓ, BZΔ et iungantur BE, EΔ.

Et quoniam BZ = ZΔ, communis autem EZ, duae iam BZ, ZE duabus ΔZ, ZE aequales sunt, altera alteri, et basis BE basi EΔ aequalis est, namque punctum E centrum est sphaerae, et puncta B, Δ sunt in superficie; ergo BZE = ΔZE (*E.* I, 8). Quando autem recta super rectam insistens angulos deinceps positos aequales inter se facit, rectus est aequalium angulorum uterque (*E.* I, *Def.* 10); rectus igitur est uterque angulorum BZE, ΔZE, quapropter EZ rectae BΔ ad rectos angulos est. Similiter iam ostendemus, ita et rectae AΓ esse, iunctis AE, ΓE. Quoniam igitur recta EZ duabus rectis AΓ, BΔ, secantibus sese, in sectione ad rectos angulos insistit, perpendicularis etiam est plano per AΓ, BΔ transeunti (*E.* XI, ·4). Planum autem per AΓ, BΔ porrectum est circulus ABΓΔ; ergo EZ perpendicularis est ad planum circuli ABΓΔ.

Propositio 8. Theor.

Si circulus sit in sphaera, a centro autem sphaerae ad illum demittatur perpendicularis et producatur ad utramque partem, in polos circuli cadet.

Sit in sphaera circulus ABΓ, et sumatur centrum sphae- F. 9.
rae punctum Δ, et erigatur a puncto Δ ad planum circuli ABΓ perpendicularis ΔE, et concurrat cum plano in puncto E; ideo punctum E centrum est circuli ABΓ. Et producatur ΔE ad utramque partem, concurratque cum superficie sphaerae in punctis Z, H; dico, puncta Z, H polos esse circuli ABΓ.

Ducantur enim rectae AEΓ, BEΘ iunganturque AZ, ZΓ, AH, HΓ.

Et quoniam recta ZE perpendicularis est ad circulum ABΓ, cum omnibus etiam rectis, illi occurrentibus et in plano circuli ABΓ sitis, rectos angulos efficiet; rectus igitur est quilibet angulorum ZEA, ZEΓ, ZEB, ZEΘ. Et quoniam AE = EΓ, communis autem EZ et ad perpendiculum; basis AZ basi ΓZ aequalis est. Similiter iam ostendemus, omnes quoque a puncto Z ad circumductam ABΓ cadentes rectas invicem aequales esse: itaque punctum Z circuli ABΓ polus est.

Similiter iam ostendemus, et punctum H polum esse circuli ΑΒΓ; ergo puncta Z, H poli sunt circuli ΑΒΓ. Igitur si circulus sit in sphaera, a centro autem sphaerae etc.

Propositio 9. Theor.

Si circulus sit in sphaera, ab altero autem polorum eius ad eum ducatur perpendicularis recta linea; in centrum circuli cadet, et inde producta cadet in alterum polum circuli.

F. 10. Sit in sphaera circulus ΑΒΓ, ab altero autem polorum eius Δ perpendiculum ΔE demittatur ad eum, concurratque cum circuli plano in puncto E, et producatur atque concurrat cum superficie sphaerae in puncto Z; dico, punctum E centrum esse circuli ΑΒΓ, punctum Z autem alterum polum circuli esse.

Ducantur enim a puncto E rectae EA, EB, et iungantur AΔ, ΔB, AZ, BZ.

Et quia ΔE perpendicularis est ad circulum ΑΒΓ; cum omnibus etiam rectis, illi occurrentibus et in circulo ΑΒΓ positis, rectos angulos efficiet. Atqui occurrunt illi et AE et EB, iacentes in plano circuli ΑΒΓ, ergo rectus est uterque angulorum ΔEA, ΔEB. Et quoniam AΔ = ΔB (*Def.* 5), et

$$A\Delta^2 = \Delta E^2 + EA^2$$
$$\Delta B^2 = BE^2 + E\Delta^2,$$

demto communi $E\Delta^2$ sequitur reliquum $AE^2 = EB^2$, quare AE = EB. Similiter etiam ostendemus, omnes quoque a puncto E ad circulum ΑΒΓ pertinentes rectas esse aequales; ergo est punctum E centrum circuli ΑΒΓ.

Iam dico, punctum Z alterum quoque polum esse circuli ΑΒΓ.

Quoniam enim AE = EB, communis autem EZ et ad rectos angulos, basis etiam AZ basi BZ aequalis est. Similiter iam ostendemus, omnes etiam a puncto Z ad lineam ΑΒΓ pertinentes rectas aequales esse. Igitur punctum Z circuli ΑΒΓ polus est, punctum Δ autem polus alter.

Propositio 10. Theor.

Si circulus sit in sphaera, recta per eius polos ducta perpendicularis est ad circulum, et per centrum et eius et sphaerae transibit.

Sit in sphaera circulus ABΓΔ, poli eius autem sint puncta F. 11.
E, Z, iungaturque recta per polos, et sit EZ; dico, EZ perpendicularem esse ad circulum ABΓ, ac transituram per centrum et eius et sphaerae.

Occurrat enim EZ plano circuli ABΓΔ in puncto H, et a puncto H connectantur AHΓ, BHΔ, et iungantur BE, EΔ, BZ, ZΔ.

Iam quia BE = EΔ, communis autem EZ, duae BE, EZ duabus ZE, EΔ sunt aequales, altera alteri, et basis BZ basi ZΔ aequalis est; ergo BEZ = ΔEZ (*E.* I, 8). Rursus quoniam BE = EΔ, communis autem EH, duae iam BE, EH duabus EH, EΔ aequales sunt, et BEH = ΔEH; ergo basis BH basi HΔ aequalis est, ac *triang.* EBH $\cong$ *triang.* EΔH, eruntque aequales reliqui anguli reliquis angulis, quos latera aequalia subtendunt, quare BHE = ΔHE (*E.* I, 4). Itaque rectus est uterque angulorum BHE, ΔHE et ideo EH rectae BΔ ad angulos rectos est. Similiter iam ostendetur, EH ad angulos rectos esse rectae AΓ, ergo EH plano etiam per BΔ, AΓ porrecto, hoc est circulo ABΓΔ, ad rectos angulos est, igitur EZ perpendicularis est ad circulum ABΓΔ.

Iam dico, eandem esse transituram per centrum et illius et sphaerae.

Etenim quoniam ABΓΔ circulus est in sphaera, ab altero autem polorum eius ad ipsum perpendicularis ducta EH, quae concurrit plano in puncto H, sequitur, punctum H centrum esse circuli ABΓΔ. Dico etiam, transituram esse eam et per centrum sphaerae. Nam quoniam ABΓΔ circulus in sphaera, ex eius autem centro H plano circuli perpendicularis EHZ erecta est, in recta EHZ centrum est sphaerae (2, *Coroll.*); ergo EZ est per centrum sphaerae. Igitur EZ ad circulum ABΓΔ perpendicularis est, et per centrum et eius et sphaerae transit.

Propositio 11. Theor.

In sphaera maximi circuli se invicem secant bifariam.

Etenim in sphaera duo maximi circuli AB, ΓΔ se invi- F. 12
cem secent in punctis E, Z; dico, circulos AB, ΓΔ se invicem secare bifariam.

Sumatur enim centrum eorum, et sit H, idque idem est ac sphaerae (6, *B.*), et iungantur EH, HZ.

Et quoniam puncta E, H, Z sunt in plano AB, sunt autem et in plano ΔΓ; ergo in ambobus circulorum AB, ΓΔ planis puncta E, H, Z sunt, igitur puncta E, H, Z in communi sunt planorum intersectione. Generatim vero duorum planorum intersectio recta est (*E.* XI, 3.) igitur EHZ recta est. Et quia punctum H centrum est circuli AB, diameter eius EZ est, igitur semicirculus est et EAZ et EBZ. Rursus quoniam punctum H centrum circuli ΓΔ est, diameter eius est EZ, ideoque semicirculus est et EΓZ et EΔZ. Ergo circuli AB, ΓΔ bisecant se invicem.

Propositio 12. Theor.

In sphaera circuli se invicem bifariam secantes maximi sunt.

F. 13. In sphaera enim duo circuli AB, ΓΔ bifariam secent se in punctis E, Z; dico, circulos AB, ΓΔ maximos esse.

Iungatur enim EZ, diameter igitur est EZ circulorum AB, ΓΔ; hinc dico, sphaerae quoque. Bisecetur enim EZ in puncto H, ergo punctum H centrum est circulorum. Erigatur a puncto H plano circuli ΓΔ ad perpendiculum recta HΘ, plano autem circuli AB recta HK (*E.* XI, 12).

Et quoniam est in sphaera circulus ΓΔ, ab eius autem centro erecta est HΘ plano circuli ad angulos rectos; ergo centrum sphaerae est in recta HΘ. Similiter iam ostendemus, esse quoque in recta HK (*a*); igitur est centrum sphaerae in inter-

---

a) Clavius haec habet in scholio: „*Hic vides mirabilem sane argumentandi modum. Nam ex eo, quod* H *dicitur non esse centrum sphaerae, demonstratum est demonstratione affirmativa,* H *esse centrum sphaerae. Quo modo argumentandi etiam usus est Euclides IX,* 12 *et Cardanus lib. V de Proport. propos.* 201." Scilicet in ipsa Theodosii argumentatione nil eiusmodi reperimus, quod miremur, sed Clavius post expositionem sic fere pergit: „*Si namque* H *dicatur non esse centrum sphaerae, ac proinde circulos* AB, ΓΔ *non esse per sphaerae centrum ductos; hoc ipso ostendemus,* H *esse centrum sphaerae, atque idcirco utrumque circulum per sphaerae centrum duci. Erigatur enim ex* H *ad planum circuli* ΓΔ *perpendicularis* HΘ, *item* HK *perpendicularis ad planum circuli* AB. *Quoniam igitur circuli* AB, ΓΔ *ponuntur non transire per centrum sphaerae, transibit utraque perpendicularis* HΘ, HK *per centrum sphaerae (*2 *Cor.). Quare punctum* H,

sectione rectarum HΘ, HK, quarum tamen intersectio punctum H est; igitur punctum H centrum est sphaerae. Est vero punctum H circulorum AB, ΓΔ quoque centrum, et quibus sphaerae circulis idem centrum est quod sphaerae, maximi sunt (6, *A.* et

---

in quo conveniunt, centrum erit sphaerae; alias centrum non exsisteret in utraque, ac proinde uterque circulus per centrum sphaerae traiicietur." Verumtamen quis est, qui non videat, prorsus otiose positum esse, punctum H non esse centrum sphaerae. Sic certe de quovis theoremate, quod demonstratione affirmativa probari potest, a principio contrarium ponere, deinde vero efficere possumus demonstratione nostra affirmativa, ut contrarium illud absurdum esse appareat. Si v. c. propositum sit, trianguli cuiusvis tres angulos aequales esse duobus rectis, hoc modo progrediamur: Ponamus enim, non esse aequales, sed aut maiores aut minores. Constructis deinde iis, quae opus sunt, duce Eucl. I, 32 facillime ostendemus, angulos illos esse aequales duobus rectis; quare falsum est illud, quod ponebatur, ergo trianguli cuiusvis tres anguli aequales sunt duobus rectis. Cave rideas, eadem Clavii causa est. At Euclidem producit patronum; incautius, inquam. Equidem non potest negari, argumentationem Euclideam quodammodo alienam esse a solita perspicuitate, sed diligenter examinantes nihil reperimus, nisi meram deductionem ad absurdum, ut aiunt. Omnis certe difficultas salvo ordine iusto anteposita propositione XVI ante nostram removeri poterat. Ita enim per proportionem $E : A = A : \Theta$ (respicio Ed. Ox.) colligeres, numerum Θ esse proportionalem tertium ad duos numeros inter se primos E, A, quod repugnat propositioni XVI. Sed nescio an magis dilucide sic fere demonstrari possit propositio Euclidea:

Positum est, numeros $1 : A : B : \Gamma : \Delta$ deinceps proportionales esse, ergo $B = AA$, $\Gamma = AB$, $\Delta = A\Gamma$. Insuper positum est, numerum E esse primum ac metiri Δ; ergo metietur etiam AΓ. Metiatur per Z, ita ut Z sit numerus integer. Proinde E aut metitur numerum A, aut non. Si metiatur, metietur etiam Γ, quoniam $\Gamma = AB$; si non metiatur numerus E numerum A, metietur nihilo secius numerum Γ, quia AΓ, divisum per E, numerum integrum Z reddit. Similiter iam ostendi potest, numerum E metiri etiam B, sive metiatur A, sive non metiatur; quocirca AA, divisum per E, numerum integrum reddit. Idque tamen fieri nequit, si E non metiatur A (*E.* VII, 27); ergo numerus E metietur numerum A.

Errori locum dedisse Euclides mihi videtur, quod conditionem illam, numerum E metiri Γ, ab initio dicat pendere ex sumptione, numeros A, E primos esse, quum revera inde non pendeat, sed inde, quod E numerus primus ac metiens Δ, et quod 1, A, B, Γ, Δ deinceps proportionales ponantur. De Cardani loco a Clavio provocato non habeo quod statuam, quum liber iste non praesto sit. Errore aliquo opinor decipi se passus est Cardanus.

6, *B.*); ergo in sphaera bifariam secantes se invicem circuli maximi sunt.

Propositio 13. Theor.

Si in sphaera maximus circulus circulum aliquem sphaerae secet ad rectos angulos, bifariam ipsum secat, et per polos.

F. 14. Etenim in sphaera maximus circulus ΑΒΓΔ secet ad angulos rectos sphaerae aliquem circulum ΕΒΖΔ; dico, ipsum secare bifariam et per polos.

Iungatur enim eorum intersectio ΒΔ, et sumatur centrum circuli ΑΒΓΔ punctum Η; idem est atque sphaerae. Et a puncto Η ad ΒΔ demittatur perpendiculum ΗΘ, et producatur ad utrasque partes, conveniatque cum superficie sphaerae in punctis Α, Γ.

Atqui quoniam duo plana sibi invicem sunt ad rectos angulos, puta plana circuli ΑΒΓΔ et circuli ΕΒΖΔ, et eorum intersectioni ΒΔ ad angulos rectos ducta est ΘΑ, sita in planorum uno ΑΒΓΔ; ergo ΑΓ etiam plano ΕΒΖΔ ad angulos rectos est. Quoniam igitur ΕΒΖΔ circulus est in sphaera, a centro autem sphaerae ad eum ducta perpendicularis ΗΘ, quae concurrit cum plano circuli ΕΒΖΔ in puncto Θ, consequitur, punctum Θ centrum esse circuli ΕΒΖΔ; igitur semicirculus est et ΒΕΔ et ΒΖΔ, quare circulus ΑΒΓΔ circulum ΕΒΓΔ secat bifariam.

Iam dico, secare ipsum et per polos.

Quia enim ΕΒΖΔ sphaerae circulus est, a centro autem sphaerae ad eum ducta perpendicularis ΗΘ, et producta ad utrasque partes, occurritque sphaerae superficiei in punctis Α, Γ; quodsi vero sit circulus in sphaera, a centro autem sphaerae ad eum demissa perpendicularis et producta ad partes utrasque, in polos circuli cadet (8): idcirco puncta Α, Γ poli sunt circuli ΕΒΖΔ, quare circulus ΑΒΓΔ circulum ΕΒΖΔ per polos secat; sed secabat bifariam; ergo circulus ΑΒΓΔ circulum ΕΒΖΔ et bifariam et per polos secat.

Propositio 14. Theor.

Si in sphaera maximus circulus circulum aliquem sphaerae non maximum secet bifariam, secat eum et ad angulos rectos et per polos.

Etenim in sphaera maximus circulus ΑΒΓΔ circulum aliquem sphaerae non maximum ΕΒΖΔ secet bifariam; dico, secare ipsum et ad angulos rectos et per polos. F. 14.

Iungatur enim intersectio eorum ΒΔ. Et quia circulus ΑΒΓΔ circulum ΕΒΖΔ secat bifariam, semicirculus est et ΒΕΔ et ΒΖΔ, ideoque ΒΔ diameter est circuli ΕΒΖΔ. Bisecetur igitur ΒΔ in puncto Θ, punctum Θ centrum est circuli ΕΒΖΔ. Et sumatur centrum circuli ΑΒΓΔ, punctum Η idem est atque sphaerae; et iuncta ΗΘ producatur ad utrasque partes, occurratque sphaerae superficiei in punctis Α, Γ.

Et quoniam est in sphaera circulus ΕΒΖΔ, per centrum autem sphaerae ad centrum eius iuncta recta ΗΘ; ad perpendiculum est recta ΗΘ circulo ΕΒΖΔ, quare plana omnia per ΗΘ ducta ad perpendiculum sunt circulo ΕΒΖΔ. Unum autem planorum per ΗΘ ductorum circulus ΑΒΓΔ est, ergo circulus ΑΒΓΔ perpendicularis est ad circulum ΕΒΖΔ; itaque circulus ΑΒΓΔ circulum ΕΒΖΔ secat ad angulos rectos.

Dico etiam, secare eum et per polos. Nam quia ΕΒΖΔ circulus est in sphaera, a centro autem sphaerae ad ipsum perpendicularis ΗΘ demissa, et producta ad utrasque partes, convenitque cum superficie sphaerae in punctis Α, Γ; puncta Α, Γ poli sunt circuli ΕΒΖΔ (8), quare circulus ΑΒΓΔ circulum ΕΒΖΔ per polos secat; secabat eum autem et ad angulos rectos, ergo circulus ΑΒΓΔ circulum ΕΒΖΔ ad angulos rectos secat et per polos.

Propositio 15. Theor.

Si in sphaera maximus circulus circulum aliquem sphaerae per polos secet, et bifariam et ad angulos rectos eum secat.

In sphaera enim maximus circulus ΑΒΓΔ aliquem sphaerae circulum ΕΒΖΔ per polos secet; dico secare eum et bifariam et ad rectos angulos. F. 14.

Sint enim poli circuli ΕΒΖΔ puncta Α, Γ; iam manifestum est, ea esse in circulo ΑΒΓΔ, nam circulus ΑΒΓΔ circulum ΕΒΖΔ per polos secat. Iungatur etiam ΑΓ.

Et quoniam in sphaera est circulus ΕΒΖΔ, per polos autem eius ducta recta ΑΓ; quodsi circulus sit in sphaera,

recta per eius polos ducta circulo est ad perpendiculum, atque per centrum et eius et sphaerae transibit (10); idcirco ΑΓ perpendicularis est ad circulum ΕΒΖΔ, quare plana omnia per ΑΓ ducta perpendicularia sunt ad ΕΒΖΔ. Unum vero planorum per ΑΓ ductorum circulus ΑΒΓΔ est; circulus ΑΒΓΔ igitur perpendicularis est ad circulum ΕΒΖΔ. Ergo circulus ΑΒΓΔ circulum ΕΒΖΔ secat ad angulos rectos; secat autem et bifariam (13); igitur circulus ΑΒΓΔ circulum ΕΒΖΔ per polos secans et bifariam secat et ad angulos rectos.

Propositio 16. Theor.

Si sit in sphaera maximus circulus, chorda ex polo eius (usque ad ambitum (a)) aequalis est lateri quadrati, maximo circulo inscripti.

F. 15. Sit in sphaera maximus circulus ΑΒΓΔ; dico, chordam ex polo eius aequalem esse lateri quadrati, circulo ΑΒΓΔ inscripti.

Ducantur enim circuli ΑΒΓΔ diametri duae ΑΓ, ΒΔ sibi ad angulos rectos, et erigatur perpendicularis ΕΖ plano circuli ΑΒΓΔ a puncto Ε, concurratque cum superficie sphaerae in puncto Ζ; ergo punctum Ζ polus est circuli ΑΒΓΔ. Iungantur etiam ΒΑ, ΑΖ, ergo ΒΑ est latus quadrati in circulo ΑΒΓΔ inscripti (*E.* IV, 6); sed ΖΑ chorda ex polo est; dico, esse ΖΑ = ΑΒ.

Nam quia ΖΕ perpendicularis est ad circulum ΑΒΓΔ, cum omnibus quoque rectis sibi occurrentibus et sitis in plano circuli ΑΒΓΔ rectos angulos efficiet; ergo ΕΖ perpendicularis est ad quamlibet rectarum ΑΕ, ΒΕ, ΔΕ. Et quoniam punctum Ε centrum est sphaerae, consequitur esse ΒΕ = ΕΖ; sed ΕΑ communis est, igitur duae ΒΕ, ΕΑ duabus ΑΕ, ΕΖ aequales sunt, altera alteri, et rectus angulus ΒΕΑ recto ΑΕΖ aequalis est; ergo basis ΒΑ basi ΑΖ aequalis est. Iam ΑΖ est chorda ex polo circuli ΑΒΓΔ; est autem ΒΑ latus quadrati in circulo maximo inscripti; igitur chorda ex polo circuli ΑΒΓΔ aequalis est lateri quadrati in circulo maximo inscripti.

---

a) Quae uncis inclusi, Voegelinus suppeditavit. Idem est monendum ad prop. seq.

Propositio 17. Theor.

Si sit in sphaera circulus, chorda autem ex polo ejus (ad ambitum) aequalis sit lateri quadrati in maximo circulo inscripti; ipse quoque erit maximus.

Sit in sphaera circulus ΑΒΓ, cuius polus punctum Δ, chorda autem ΔΓ ex polo eius aequalis sit lateri quadrati in circulo maximo inscripti; dico, circulum ΑΒΓ maximum esse. F. 16.

Producatur enim planum per ΔΓ et per centrum sphaerae, sectionem faciet circulum maximum in superficie sphaerae; faciat ΒΔΓΕ, et sit communis intersectio ΒΓ, et iungatur ΔΒ.

Itaque est ΔΓ = ΔΒ *(Def. 5.)*, et utraque rectarum ΔΓ, ΔΒ aequalis est lateri quadrati in maximo circulo inscripti; ergo est ΒΔΓ semicirculi arcus, igitur ΒΓ diameter circuli ΒΔΓΕ. Et quoniam punctum Δ polus est circuli ΑΒΓ, circulus ΔΒΕΓ circulum ΑΒΓ per polos secat. Quoniam igitur in sphaera circulus ΔΒΕΓ circulum ΑΒΓ per polos secat, et bifariam et ad angulos rectos secat (15); intersectio autem est ΒΓ, quare ΒΓ diameter est circuli ΑΒΓ; est vero etiam sphaerae; ergo circulus ΑΒΓ maximus est.

Propositio 18. Probl.

Circuli in sphaera dati diametro aequalem describere.

Sit datus sphaerae circulus ΑΒΓ, oportet autem circuli ΑΒΓ diametro aequalem describere. F. 17.

Sumantur in circuli ambitu puncta Α, Β, Γ utcumque posita, et iungantur ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, atque ex tribus rectis constituatur triangulum ΔΕΖ, ita ut sit ΔΕ = ΑΒ, ΕΖ = ΒΓ, ΖΔ = ΑΓ (*E.* I, 22), et a puncto Ε ducatur ΕΗ ad rectos angulos rectae ΕΔ, a puncto Ζ autem ΖΗ ad rectos angulos rectae ΔΖ, et iungatur ΔΗ; et ducatur diameter ΑΘ circuli ΑΒΓ; dico, esse ΔΗ = ΑΘ.

Iam iungatur ΓΘ.

Quoniam igitur duae ΑΒ, ΒΓ duabus ΔΕ, ΕΖ aequales sunt, altera alteri, et basis ΑΓ aequalis est basi ΔΖ, sequitur esse

$$\begin{array}{c} AB\Gamma = \Delta EZ, \\ \text{sed est } AB\Gamma = A\Theta\Gamma \ (E.\ III,\ 21) \\ \text{et } \Delta EZ = \Delta HZ \ (a) \\ \hline \text{ergo } A\Theta\Gamma = \Delta HZ. \end{array}$$

Sed est angulus rectus ΑΓΘ aequalis recto ΔZH; atqui adsunt duo triangula ΑΘΓ, ΔHZ, quorum duo anguli ΑΓΘ, ΓΘΑ duobus angulis ΔZH, ZHΔ aequales sunt, alter alteri, et unum latus ΑΓ aequale lateri uni ΔZ, quod subtendit unum aequalium angulorum; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt alterum alteri (*E.* I, 26), quare est ΑΘ = ΔH. Sed ΑΘ diameter circuli est; igitur ΔH aequalis est circuli diametro.

Propositio 19. Probl.

Sphaerae datae diametro aequalem describere.

F. 18. Mente iam concipiatur sphaera, cuius diametro aequalem describere oportet; et sumantur in superficie sphaerae duo puncta utcunque posita A, B, et polo A, intervallo autem AB, describatur circulus ΒΓΔ *(b)*; ergo licet describere circuli ΒΓΔ diametro aequalem (18). Ex tribus igitur rectis, quarum quidem duae chordis ex polo circuli ΒΓΔ aequales, una autem diametro aequalis, constituatur triangulum EZH, ita ut alterutra rectarum ZE, EH alterutri chordae ex polo A sit aequalis, recta ZH autem diametro; et ducantur lineae rectae ZΘ, HΘ per puncta Z, H ad angulos rectos rectis ZE, EH, iungaturque EΘ; dico, EΘ aequalem esse diametro sphaerae.

Concipiatur enim sphaerae diameter AK, et planum per AK; ergo sectionem efficiet circulum maximum. Efficiat AΔB, et iungantur AΔ, AB, BΔ, ΔK.

Iam quoniam duae AB, BΔ duabus EZ, ZH aequales sunt, altera alteri, basis autem AΔ aequalis est basi EH, consequitur ABΔ = EZH. Sed est ABΔ = AKΔ et EZH = EΘH,

---

a) Descriptus enim circulus diametro ΔH transibit per puncta E, Z, quippe quum et ΔEH et ΔZH angulus rectus sit (*E.* III, 31. *Cor.* 2. *ed. Camereri.*); quocirca anguli ΔEZ, ΔHZ aequales sunt (*E.* III, 21.).

b) Intervallum est chorda arcus AB, ut saepius. Cf. *Hero Alex. def. geom.* VIII.

ut in priore ostensum est; quin etiam rectus angulus AΔK aequalis est recto EHΘ; ideo duo adsunt triangula AKΔ, EΘH, quae habent duos angulos AΔK, ΔKA duobus angulis EHΘ, HΘE aequales, alterum alteri, unumque latus uni lateri aequale, quod subtendit unum aequalium angulorum, AΔ lateri EH; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, alterum alteri (*E.* I, 26), quare AK = EΘ est. Et est AK diameter sphaerae, itaqae EΘ aequalis est sphaerae diametro.

Propositio 20. Probl.

Per duo data puncta, quae sunt in superficie sphaerica, describere circulum maximum.

Sint data duo puncta A, B, quae sunt in superficie sphae- F. 19.
rica; iam oportet circulum maximum describere per puncta A, B.

Si quidem puncta A, B sunt e diametro sphaerae, manifestum est, circulos maximos numero infinitos per puncta A, B describi posse. Sint igitur non e diametro sphaerae puncta A, B; et polo quidem A, intervallo autem latere quadrati in circulo maximo inscripti describatur circulus ΓΔE, ideo maximus est *circ.* ΓΔE, nam chorda ex polo eius aequalis est lateri quadrati in circulo maximo inscripti (17). Rursus polo B, intervallo autem latere quadrati in maximo circulo inscripti, describatur circulus ZEH, maximus igitur est circulus ZEH, nam chorda ex polo eius aequalis est lateri quadrati in maximo circulo inscripti. Atque iungantur a puncto E ad A, B rectae AE, EB.

Igitur utraque rectarum EA, EB aequalis est lateri quadrati in circulo maximo inscripti, quare est EA = EB. Idcirco polo quidem E, intervallo autem EB descriptus circulus transibit quoque per A, propterea quod est EA = EB. Transeat, sitque ut ABΘ, maximus ergo est circulus BAΘ, nam chorda ex polo eius aequalis est lateri quadrati in circulo maximo inscripti. Ergo per duo data puncta A, B, quae sunt in superficie sphaerica, circulus maximus ABΘ descriptus est.

Propositio 21. Probl.

Dati in sphaera circuli polum invenire.

Sit datus in sphaera circulus ΑΒΓ, oportet igitur invenire
F. 20. polum circuli ΑΒΓ.

Iam sumatur in ambitu eius quodlibet punctum Δ, et auferantur duo arcus aequales ΔΑ, ΑΕ, et reliquus arcus ΔΕ bisecetur in puncto Ζ; circulus ΑΒΓ aut maximus est, aut non. Sit primum non maximus, et per duo data puncta Ζ, Α, quae sunt in superficie sphaerica, describatur maximus circulus ΖΑΘ (20).

Et quoniam *arc.* ΔΑ = *arc.* ΑΕ
et *arc.* ΔΖ = *arc.* ΖΕ
ideo *arc.* ΑΔΖ = *arc.* ΑΕΖ;

ergo bisecat circulus ΖΑΘ circulum ΑΒΓ. Quoniam igitur in sphaera maximus circulus ΑΖΘ circulum aliquem sphaerae non maximum secat bifariam, secat et ad angulos rectos et per polos, quapropter circulus ΖΘΑ circulum ΑΒΓ et ad angulos rectos et per polos secat (14). Bisecetur arcus ΖΑ in puncto Η, punctum Η polum esse circuli ΑΒΓ consequitur.

At rursus maximus sit circulus ΑΒΓ. Iam similiter ostendemus, esse *arc.* ΑΔΖ = *arc.* ΑΕΖ. Nempe bisecetur arcus ΑΓΖ in puncto Γ, ergo uterque arcuum ΑΓ, ΓΖ quadrans est; quare polo quidem Γ, intervallo autem ΓΖ circulus descriptus transibit et per punctum Α, propterea quod punctum Α puncto Ζ e diametro est. Transeat, sitque ut ΖΑΘ, maximus igitur est circulus ΖΑΘ, nam chorda ex polo eius aequalis est lateri quadrati in circulo maximo inscripti. Et quoniam punctum Γ polus est circuli ΖΑΘ, circulus ΑΒΓ circulum ΖΑΘ per polos secat. Quoniam igitur in sphaera maximus circulus ΑΒΓ aliquem sphaera circulum ΖΑΘ per polos secat, bifariam quoque secat et ad angulos rectos (15); ideo circulus ΑΒΓ perpendicularis est ad circulum ΖΑΘ, quare et circulus ΖΑΘ perpendicularis est ad circulum ΑΒΓ. Quoniam igitur in sphaera maximus circulus ΖΑΘ aliquem sphaerae circulum ΑΒΓ secat ad angulos rectos, et bifariam et per polos secat (13); ergo circulus ΖΑΘ circulum ΑΒΓ et bifariam secat et per polos. Bisecetur arcus ΖΑ in puncto Η, punctum Η igitur polus est circuli ΑΒΓ.

Propositio 22. Theor.

Si recta quaedam in sphaera per centrum ducta rectam aliquam non per centrum ductam bifariam secet, secabit et ad angulos rectos; et si eam ad angulos rectos secet, secabit et bifariam.

Demonstratio eadem, quae in circularibus. Etenim si per diametrum eam, quae per centrum sphaerae transit, perque eam, quae non transit per centrum, producantur plana, efficient intersectionem lineam, circulum; atque erit in circulo recta aliqua per centrum ducta, rectam aliquam non per centrum ductam bisecans, ideoque ipsam secabit et ad rectos angulos, et si eam secet ad angulos rectos, bifariam quoque secabit.

Propositio 23. Theor.

Si sit in sphaera circulus, a centro autem sphaerae ad centrum circuli iungatur recta quaedam; iuncta erit perpendicularis circulo.

Sit enim in sphaera circulus ΑΒΓ, et centrum quidem F. 20. c.
sphaerae sit punctum Δ, centrum circuli autem punctum E, iungaturque ΔE; dico, ΔE ad perpendiculum esse circulo ΑΒΓ.

Ducatur enim per centrum E in eo utcunque recta aliqua AEB, et iungantur ΔA, ΔB.

Et quoniam AE = EB, communis vero EΔ, iam duae AE, EΔ duabus BE, EΔ aequales sunt, altera alteri, et basis AΔ aequalis basi ΔB est; ergo AEΔ = ΔEB; igitur rectus est uterque angulorum AEΔ, BEΔ, ideoque ΔE ad rectos angulos est rectae AB. Similiter iam ostendemus, rectam ΔE omnibus etiam per E ductis in plano circuli ΑΒΓ esse ad angulos rectos; ergo recta ΔE plano circuli ΑΒΓ est ad angulos rectos.

Theodosii Sphaericorum
Liber secundus.

Definitio.

Circuli in sphaera contingere sese dicuntur, quando intersectio communis planorum utrumque circulum contingit.

Propositio 1. Theor.

Circuli paralleli in sphaera circa eosdem polos sunt.

F. 21. Sint enim in sphaera paralleli circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ; dico, circulos ΑΒΓ, ΔΕΖ circa polos eosdem esse.

Sumantur enim poli circuli ΑΒΓ, sintque Η, Θ, et iungatur ΗΘ.

Et quoniam, si sit circulus in sphaera, recta, quae per eius polos ducitur, perpendicularis est ad circulum, atque transit per centrum et eius et sphaerae; ad perpendiculum est ΗΘ circulo ΑΒΓ. Est etiam circulus ΑΒΓ parallelus circulo ΔΕΖ; ergo ΗΘ perpendicularis est et ad circulum ΔΕΖ. Quoniam igitur est in sphaera circulus ΔΕΖ, e centro autem sphaerae ad eum demissa perpendicularis ΗΘ, et producta ad utrasque partes, atque concurrit cum superficie sphaerae in punctis Η, Θ; sed si circulus sit in sphaera, e centro autem sphaerae ad eum demissa perpendicularis, et producta ad utrasque partes, in polos circuli incidet (I, 8.); ergo puncta Η, Θ poli sunt circuli ΔΕΖ. Igitur circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ circa polos eosdem sunt.

Propositio 2. Theor.

Circuli in sphaera, qui sunt circa eosdem polos, paralleli sunt.

Sint circa polos eosdem Η, Θ in sphaera circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ; dico, circulos ΑΒΓ, ΔΕΖ parallelos esse. F. 21.

Iungatur enim ΗΘ.

Et quoniam in sphaera est circulus ΑΒΓ, per eius autem polos ducta ΗΘ; igitur ΗΘ perpendicularis est ad circulum ΑΒΓ (I, 10.). Similiter iam ostendemus, rectam ΗΘ etiam esse ad perpendiculum circulo ΔΕΖ. Quibus autem planis recta perpendicularis est, ea producta non concurrent (*E.* XI, 14); idcirco producta circulorum ΑΒΓ, ΔΕΖ plana non concurrent, ergo parallelus est circulus ΑΒΓ circulo ΔΕΖ.

Propositio 3. Theor.

Si duo circuli in sphaera maximi cuiusdam circuli ambitum in eodem puncto secent, polosque habeant in ipso; circuli se invicem contingent.

Etenim in sphaera duo circuli ΑΒΓ, ΓΔΕ maximi cuiusdam circuli ambitum ΑΓΕ in eodem puncto Γ secent, polosque habeant in ipso; dico, fore ut se invicem contingant circuli ΑΒΓ, ΓΔΕ. F. 22.

Sint enim intersectiones circulorum quidem ΑΓΕ et ΑΒΓ recta ΑΓ, circulorum autem ΑΓΕ et ΓΔΕ recta ΓΕ, atque circulorum ΑΒΓ et ΓΔΕ recta ΗΓΖ.

Iam quia in sphaera maximus circulus ΑΓΕ sphaerae quendam circulum ΑΒΓ per polos secat, secabit et bifariam et ad angulos rectos (I, 15.); quocirca ΑΓ diameter est circuli ΑΒΓ. Similiter iam ostendemus, et rectam ΓΕ esse diametrum circuli ΓΔΕ. Et quia circulus ΑΓΕ perpendicularis est utrique circulo ΑΒΓ, ΓΔΕ, utervis etiam circulus ΑΒΓ, ΓΔΕ perpendicularis est circulo ΑΓΕ, ergo intersectio eorum ad perpendiculum est circulo ΑΓΕ (*E.* XI, 19). Sed intersectio eorum est ΖΓΗ, igitur ΖΓΗ ad perpendiculum est circulo ΑΓΕ; quocirca et perpendicularis est ad omnes illi occurrentes rectas, sitasque in plano circuli ΑΓΕ (*E.* XI, *Def.* 3.). Occurrunt illi autem ambae ΑΓ, ΓΕ, iacentes in plano circuli ΑΓΕ; ergo ΖΗ perpendicularis est ad utramvis rectarum ΑΓ,ΓΕ.

Quoniam igitur circuli ABΓ diametro AΓ ab extremitate ad angulos rectos ducta est ZH, contingit etiam ZH circulum ABΓ in puncto Γ (*E.* III, 16. *Cor.*). Similiter iam ostendemus, rectam ZH et circulum ΓΔE contingere in puncto Γ. Sed in sphaera circuli se invicem contingere dicuntur, quando communis intersectio planorum utrumque circulum contingit (*Def.*). Contingit autem ZH utrumque circulum in puncto Γ, ergo et circuli ABΓ, ΓΔE sese contingent.

Propositio 4. Theor.

Si duo circuli in sphaera se invicem contingant, maximus circulus, qui per polos eorum describitur, transibit etiam per contactum eorum.

F. 23. Etenim in sphaera duo circuli ABΓ, ΓΔE sese contingant in puncto Γ, et sit polus quidem circuli ABΓ punctum K, polus autem circuli ΓΔE punctum Z; dico, maximum circulum per polos Z, K descriptum transiturum esse et per punctum Γ.

Non enim, sed, si fieri potest, cadat et sit ut circulus ZBK. Et polo quidem Z, intervallo autem ZB, describatur circulus BHΘ; ideo est *circ.* ΓΔE ‡ *circ.* BHΘ, quippe qui circa eosdem polos sint (2). Et quia in sphaera duo circuli ABΓ, BHΘ ambitum ZBK circuli cuiusdam maximi in eodem puncto B secant, polosque habent in ipso, contingent sese circuli ABΓ, BHΘ (3); sed etiam secant, id quod fieri non potest. Non igitur circulus maximus per polos Z, K descriptus non transibit etiam per punctum Γ; quare per polos circulorum ABΓ, ΓΔE descriptus circulus maximus transibit etiam per contactum circulorum.

Propositio 5. Theor.

Si in sphaera duo circuli se invicem contingant, maximus circulus, qui per polos unius et per contactum describitur, transibit quoque per polos alterius.

F. 24. Namque in sphaera duo circuli ABΓ, ΓΔE se invicem contingant in puncto Γ, sitque polus quidem circuli ABΓ punctum Z, polus autem circuli ΓΔE punctum H; dico, circulum

maximum, qui per puncta Z, Γ describitur, et per punctum H transiturum esse.

Non enim, sed, si fieri potest, cadat ut circulus ZΓΘ, et describatur maximus circulus ZH per polos Z, H; transibit igitur per punctum Γ (4).

Iungatur ZΓ.

Et quoniam maximus est uterque circulorum ZΓH, ZΓΘ, bifariam secabunt sese (I, 11); ergo semicirculus est uterque ZKΓ, ZΛΓ; quocirca ZΓ diameter est sphaerae, quippe quae et maximorum circulorum ZΓH, ZΓΘ; sed etiam chorda est ex polo circuli ABΓ, idque fieri nequit. Non igitur maximus circulus, qui per puncta Z, Γ describitur, non transibit et per punctum H, ergo transibit per punctum H.

Propositio 6. Theor.

Si maximus circulus in sphaera circulum quendam sphaerae contingat, alterum quoque ipsi aequalem et parallelum continget.

Contingat enim in sphaera maximus circulus ABΓ circulum quendam ΓΔ in puncto Γ; dico, fore ut circulus ABΓ contingat alterum quoque circulum, aequalem et parallelum circulo ΓΔ. F. 25.

Sumatur polus circuli ΓΔ et sit punctum E, atque describatur per puncta Γ, E maximus circulus ΓEΔBZH (I, 20), sumaturque *arc.* ΓE = *arc.* BZ, et polo quidem Z, intervallo autem ZB describatur circulus BH.

Et quoniam in sphaera duo circuli ABΓ, ΓΔ sese contingunt, perque polos unius, per E, et per contactum descriptus est maximus circulus ΓEΔBZH; transibit circulus ΓEΔBZH per polos circuli ABΓ (5). Et quoniam in sphaera duo circuli ABΓ, BH circuli alicuius maximi ambitum ΓH in eodem puncto B secant, polos habentes in ipso, circuli ABΓ, BH se invicem contingent (3). Et quia *arc.* ΓE = *arc.* BZ, communis addatur *arc.* EB, ergo *arc.* ΓB = *arc.* EZ. Sed *arc.* ΓB est circumducta semicirculi, ergo et *arc.* EZ semicirculi circumducta est; igitur punctum E puncto Z e diametro est. Et est punctum E polus circuli ΓΔ, igitur Z est polus alter circuli ΓΔ. Rursum quia *arc.* EZ semicirculi circumducta et Z polus est circuli BH, ergo et E polus alter est circuli BH.

Inde circuli ΓΔ, BH, ut circa polos eosdem, paralleli sunt (2); ergo *circ.* ΓΔ ‡ *circ.* BH. Et quoniam *arc.* ΓE = *arc.* BZ, ergo et aequalis est circulus ΓΔ circulo BH (I, 21. *b.*), sed etiam parallelus; itaque circulus ABΓ contingit alterum quoque circulum BH aequalem atque parallelum circulo ΓΔ.

Propositio 7. Theor.

Si sint in sphaera duo circuli et aequales et paralleli, circulus maximus contingens eorum unum continget alterum quoque.

F. 26. Sint in sphaera circuli duo AB, ΓΔ et aequales et paralleli; dico, fore ut maximus circulus circulum AB contingens contingat etiam ΓΔ.

Nam, si fieri potest, circulus maximus AE contingat quidem circulum AB in puncto A, sed circulum ΓΔ non contingat.

Et quoniam in sphaera circulus maximus AE sphaerae aliquem circulum AB contingit, alterum quoque continget aequalem et parallelum circulo AB (6); itaque contingat *circ.* EZ. Quoniam igitur circulus AB circulo EZ aequalis et parallelus, circulus vero AB etiam circulo ΓΔ aequalis est et parallelus; circulus ΓΔ igitur circulo EZ aequalis et parallelus est. Erunt ergo in sphaera circuli tres aequales et paralleli, quod fieri nequit (2, *a.*). Non igitur maximus circulus circulum AB contingens non continget etiam ΓΔ, ergo continget.

Propositio 8. Theor.

Si maximus circulus in sphaera ad aliquem sphaerae circulorum obliquus sit, continget circulos duos mutuo quidem aequales, sed parallelos praedicto.

F. 27. Etenim in sphaera circulus maximus ABΓ obliquus sit ad aliquem sphaerae circulum BΔ, id est, non sit per polos; dico, fore ut circulus ABΓ contingat circulos duos invicem aequales quidem, sed praedicto *circ.* BΔ parallelos.

Nam quia circulus ABΓ obliquus est ad BΔ, polus circuli BΔ non est in circulo ABΓ. Itaque sumatur polus circuli BΔ, sitque punctum E, et per punctum E, perque unum polorum circuli ABΓ describatur circulus maximus AEΓH, et polo quidem E, intervallo autem AE describatur circulus AZ.

Ergo est *circ.* AZ ‡ *circ.* BΔ, sunt enim circa polos eosdem (2). Et quoniam in sphaera duo circuli ABΓ, AZ maximi cuiusdam circuli ambitum in eodem puncto A secant, polosque habent in ipso, se invicem contingent (3); circulus ABΓ igitur continget circulum AZ. Quoniam igitur in sphaera circulus maximus ABΓ aliquem sphaerae circulum AZ contingit, continget alterum quoque et aequalem et parallelum circulo AZ (6); itaque contingat circulum ΓH. Quoniam igitur circulus AZ circulo ΓH et aequalis est et parallelus, circulus AZ vero parallelus circulo BΔ, ergo est *circ.* ΓH ‡ *circ.* BΔ. Quare circulus ABΓ continget circulos duos AZ, ΓH, aequales quidem invicem, parallelos autem circulo BΔ.

Propositio 9. Theor.

Si duo circuli in sphaera secent se, per polos autem eorum circulus maximus sit descriptus; bifariam secabit segmenta distincta circulorum.

Etenim in sphaera duo circuli ZAEB, ZΔEΓ secent se F. 28.
in punctis E, Z, et per polos eorum describatur circulus maximus AΓBΔ; dico, fore ut circulus AΓBΔ bifariam secet circulorum segmenta distincta, hoc est, ut sit *arc.* ZA = *arc.* AE, *arc.* ZB = *arc.* BE, *arc.* ZΓ = *arc.* ΓE, et *arc.* ZΔ = *arc.* ΔE.

Sit enim circuli AΓBΔ et circuli ZAEB intersectio AB, circuli AΓBΔ autem et ZΓEΔ intersectio sit ΓΔ, iungaturque ZH, HE.

Et quoniam puncta Z, H, E in plano circuli AEBΓ sunt, sunt vero et in plano circuli ZΔEΓ; ergo puncta Z, H, E sunt in communi intersectione planorum amborum. Sed generatim intersectio duorum planorum recta est, igitur ZH est in directum rectae HE. Et quoniam in sphaera circulus maximus AΓBΔ aliquem sphaerae circulum ZAEB per polos secat, secabit et bifariam et ad angulos rectos (I, 15.), quare AB diameter est circuli ZAEB. Similiter iam ostendemus, et ΓΔ esse diametrum circuli ZΔEΓ. Et quia circulus AΓBΔ perpendicularis est ad utrumque circulum ZAEB, ZΔEΓ, circulorum ZAEB, ZΔEΓ uterque perpendicularis est ad circulum AΓBΔ. Quodsi duo plana plano cuidem sint ad angulos re-

ctos, intersectio communis plano etiam erit ad rectos angulos (*E.* XI, 19), quocirca intersectio planorum ZAEB, ZΔEΓ plano AΓBΔ ad angulos rectos est. Sed intersectio communis est ZHE, igitur ZHE perpendicularis est ad circulum AΓBΔ, quare et cum omnibus ei occurrentibus et in plano circuli AΓBΔ sitis rectis rectos efficiet angulos. Occurrit autem rectae ZHE utraque rectarum AB, ΓΔ, positae in plano circuli AΓBΔ; ergo ZHE perpendicularis est ad utramque AB, ΓΔ, quare utraque AB, ΓΔ perpendicularis est ad ZHE. Quoniam igitur in circulo ZAEB recta quaedam AB per centrum ducta rectam quandam ZHE non per centrum ductam secat ad angulos rectos, bifariam quoque secabit ipsam (*E.* III, 3); hinc est ZH = HE. Sed communis est HA, et ad angulos rectos, igitur et *arc.* ZA = *arc.* AE. Similiter iam ostendemus, esse quoque *arc.* ZB = *arc.* BE, *arc.* ZΓ = *arc.* ΓE, atque *arc.* ZΔ = *arc.* ΔE; quapropter circulus AΓBΔ bisecat segmenta distincta circulorum.

Propositio 10. Theor.

Si sint in sphaera circuli paralleli, per polos autem eorum descripti circuli maximi; circulorum parallelorum quidem arcus inter circulos maximos similes sunt, sed maximorum circulorum arcus inter circulos parallelos sunt aequales.

F. 29. Sint in sphaera circuli paralleli ABΓΔ, EZHΘ, per polos eorum autem describantur circuli AEHΓ, BZΘΔ; dico, circulorum quidem parallelorum arcus inter circulos maximos esse similes, hoc est, esse *arc.* BΓ ∾ *arc.* ZH, *arc.* ΓΔ ∾ *arc.* HΘ, *arc.* ΔA ∾ *arc.* ΘE, et *arc.* AB ∾ *arc.* EZ; maximorum circulorum arcus autem inter circulos parallelos esse aequales, hoc est, arcus quattuor ZB, HΓ, ΘΔ, EA mutuo esse aequales.

Sit enim intersectio circulorum ABΓΔ et BZΘΔ recta BΔ, circulorum ABΓΔ et AEHΓ recta AΓ, circulorum EZHΘ et ZKΘ recta ZΘ, atque circulorum EZHΘ et EKH recta EH.

Et quoniam in sphaera circulus maximus AEHΓ aliquem sphaerae circulum ABΓΔ per polos secat, secabit et bifariam et ad angulos rectos (I, 15), ergo AΓ diameter circuli ABΓΔ. est. Similiter iam ostendemus, rectam BΔ diametrum esse circuli ABΓΔ, quare punctum Λ centrum est circuli ABΓΔ

Rursus quoniam in sphaera circulus maximus ΑΕΗΓ aliquem sphaerae circulum ΕΖΗΘ per polos secat, secabit et bifariam et ad rectos angulos; ergo ΕΗ diameter circuli ΕΖΗΘ est. Similiter iam ostendemus, et rectam ΖΘ diametrum esse circuli ΕΖΗΘ, quare punctum Μ centrum est circuli ΕΖΗΘ. Atqui quoniam duo plana parallela ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ secantur ab aliquo plano ΒΖΘΔ, ergo intersectiones eorum sunt parallelae (*E.* XI, 16), igitur est ΒΔ ‡ ΖΘ. Similiter iam ostendemus, esse quoque ΓΑ ‡ ΕΗ. Igitur quia rectae duae sibi occurrentes ΒΛ, ΛΓ parallelae sunt duabus rectis sibi occurrentibus ΖΜ, ΜΗ, iacentibus non in eodem plano, continebunt angulos aequales (*E.* XI, 10) *(a)*, ergo ΖΜΗ = ΒΛΓ; suntque ad centra, et angulus quidem ΖΜΗ innititur arcui ΖΗ, angulus vero ΒΛΓ arcui ΒΓ, inde est *arc.* ΒΓ ∾ *arc.* ΖΗ (*E.* III, *Def.* 11). Similiter iam ostendemus, esse etiam *arc.* ΓΔ ∾ *arc.* ΗΘ, *arc.* ΑΔ ∾ *arc.* ΕΘ, et *arc.* ΑΒ ∾ *arc.* ΕΖ. Itaque parallelorum circulorum arcus inter circulos maximos intercepti similes sunt.

Iam dico, et maximorum circulorum arcus inter circulos parallelos esse aequales.

Nam quia punctum Κ polus est circuli ΑΒΓΔ, quattuor arcus ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ invicem aequales sunt (I, *Def.* 5). Rursus quoniam punctum Κ polus est circuli ΕΖΗΘ, quattuor arcus ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ sibi sunt aequales invicem, quibus igitur subductis quattuor arcus ΕΑ, ΖΒ, ΗΓ, ΘΔ mutuo sunt aequales. Quapropter circulorum maximorum arcus inter circulos parallelos invicem aequales sunt.

Propositio 11. Theor.

Si in aequalium circulorum diametris segmenta circulorum aequalia ad angulos rectos constituta, eorumque ablati sint arcus aequales ad segmentorum partes extremas, dimidiis integrorum minores (b), et si a punctis terminantibus ad ambitus circulorum primo positorum productae sint rectae aequales; abscindent arcus aequales circulorum primo positorum ad extremitates diametrorum.

---

a) Sed cfr. *Clavium* ad Eucl. l. c.

b) Adde: „aut maiores", nam de solis aequalibus locum non habet.

F. 30. Etenim in diametris ΑΓ, ΔΖ circulorum aequalium ΑΒΓ, ΔΕΖ segmenta circulorum aequalia ΑΗΓ, ΔΘΖ constituantur ad angulos rectos, ad quorum partes extremas, nempe ad puncta Α, Δ, auferantur arcus aequales ΑΗ, ΔΘ, dimidiis integrorum ΑΗΓ, ΔΘΖ minores, atque a punctis Η, Θ ad circulorum primo positorum ambitus ΑΒΓ, ΔΕΖ producantur aequales rectae ΗΒ, ΘΕ; dico, esse *arc.* ΑΒ = *arc.* ΔΕ.

Demittantur enim a punctis Η, Θ perpendicula ad plana circulorum ΑΒΓ, ΔΕΖ; iam cadent in communes intersectiones, id est, in rectas ΑΓ, ΔΖ (*E.* XI, 38). Cadant, et sint ΗΚ, ΘΛ, sumanturque centra circulorum ΑΒΓ, ΔΕΖ, quae sint puncta Μ, Ν, et iungantur ΚΒ, ΒΜ, ΛΕ, ΕΝ.

Et quia ΗΚ ad perpendiculum est plano circuli ΑΒΓ, cum omnibus quoque ei occurrentibus, et in plano circuli ΑΒΓ iacentibus rectis rectos angulos efficiet. Occurrit autem ei recta ΑΒ, in plano sita circuli ΑΒΓ, quare ΗΚΒ angulus rectus est. Similiter iam ostendemus, etiam angulum ΘΛΕ rectum esse. Atqui quoniam duo segmenta ΑΗΓ, ΔΘΖ aequalia sunt, et sublati arcus aequales ΑΗ, ΔΘ, et perpendicula ΗΚ, ΘΛ demissa; ergo est ΑΚ = ΔΛ et ΗΚ = ΘΛ *(a)*. Et quoniam ΒΗ = ΘΕ, ergo et $BH^2 = \Theta E^2$;

sed est $BH^2 = HK^2 + KB^2$

et $\Theta E^2 = \Theta\Lambda^2 + \Lambda E^2$

proinde $HK^2 + KB^2 = \Theta\Lambda^2 + \Lambda E^2$

est autem $HK^2 = \Theta\Lambda^2$

igitur $KB^2 = \Lambda E^2$, quare ΚΒ = ΛΕ.

Et quoniam est ΑΜ = ΔΝ,

demta ΑΚ = ΔΛ

residua est ΚΜ = ΛΝ;

sed est etiam ΒΜ = ΝΕ, itaque duae ΚΜ, ΜΒ duabus ΛΝ, ΝΕ sunt aequales, altera alteri, et basis ΚΒ aequalis basi ΛΕ est, ergo ΚΜΒ = ΛΝΕ (*E.* I, 8). Sed in circulis aequalibus aequa-

---

a) Etenim est ΑΚΗ = ΔΛΘ (= *ang. r.*)

ΗΑΚ = ΘΔΛ (*E.* III. 27).

chord. ΑΗ = *chord.* ΔΘ (*E.* III, 29).

proinde *triang.* ΑΗΚ ≅ *triang.* ΔΘΛ (*E.* I, 26).

les anguli innituntur arcubus aequalibus, sive ad centra, sive ad ambitus sint innisi (*E.* III, 26.); igitur est *arc.* AB = *arc.* ΔE.

Propositio 12. Theor. (*a*)

Si in aequalium circulorum diametris aequalia segmenta circulorum ad angulos rectos constituta sint, quorum auferantur arcus aequales ad partes extremas, dimidiis integrorum minores (*b*), *et si circulorum arcus aequales ablati sint ad easdem extremitates diametrorum; aequales erunt rectae ad puncta terminantia coniunctae.*

Nam in diametris AΓ, ΔZ circulorum aequalium ABΓ, ΔEZ aequalia circulorum segmenta AHΓ, ΔΘZ ad rectos angulos constituantur, et ad partes extremas segmentorum auferantur arcus eorum aequales AH, ΔΘ, dimidiis integrorum minores, circulorum vero ABΓ, ΔEZ auferantur arcus aequales AB, ΔE ad easdem extremitates diametrorum, et coniungantur HB, ΘE; dico, HB = ΘE esse. F. 30.

Demittantur enim a punctis H, Θ ad plana circulorum ABΓ, ΔEZ perpendicula HK, ΘΛ; iam cadent in communes intersectiones, hoc est, in rectas AΓ, ΔZ et sumantur centra circulorum, quae sint M, N iunganturque KB, BM, ΛE, EN.

Et quoniam est *arc.* AB = *arc.* ΔE, sequitur AMB = ΔNE. Et quia duo circulorum segmenta aequalia sunt AHΓ, ΔΘZ, et abscissi arcus aequales AH, ΔΘ, atque demissa perpendicula KH, ΘΛ; consequens est AK = ΔΛ, et HK = ΘΛ (*E.* I, 26). Quoniam igitur

AM = ΔN
demta AK = ΔΛ
residua est KM = ΛN.

Verum etiam est BM = NE, ergo duae KM, MB duabus ΛN, NE aequales sunt, altera alteri, et KMB = ΛNE; basis igitur KB basi ΛE aequalis est. Et quia HK ad perpendiculum est plano circuli ABΓ, angulos etiam rectos efficiet cum omnibus ipsi occurrentibus rectis et sitis in plano circuli ABΓ. Occurrit ei autem KB, sita in plano circuli ABΓ, quare HKB

a) Voegelinus hanc propositionem cum proxime priore in unam contraxit.
b) Adde: „aut maiores".

angulus rectus est. Similiter iam ostendemus, etiam ΘΛΕ esse angulum rectum. Quoniam igitur est HK = ΘΛ, et KB = ΛE, iam duae HK, KB duabus ΘΛ, ΛE sunt aequales, altera alteri, rectosque continent angulos; ergo basis HB basi ΘE aequalis est.

Propositio 13. Theor. (a)

Si sint in sphaera circuli paralleli, et describantur circuli maximi, contingentes illorum unum, secantes autem ceteros; circulorum quidem parallelorum arcus inter eos maximorum circulorum semicirculos, qui non concurrunt, intercepti, similes sunt, sed circulorum maximorum arcus inter parallelos aequales sunt.

F. 31. Sint in sphaera circuli paralleli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, ΚΛ, et describantur circuli maximi ΑΕΚΗΓΦΤ, ΒΖΛΘΔΤΥ, contingentes illorum unum ΚΛ in punctis Κ, Λ, secantes autem ceteros; dico, parallelorum quidem circulorum arcus inter non concurrentes maximorum circulorum semicirculos similes esse.

Qui tamen sint illi arcus inter non concurrentes semicirculos, cognoscemus hoc modo:

Quoniam in sphaera circuli maximi bisecant sese, *arc.*ΣΚΑΤ semicirculi circumducta est, quare *arc.* ΚΑΤ minor est, quam circumducta semicirculi. Rursum quia *arc.* ΤΦΓΣ semicirculi circumducta est, ergo *arc.* ΚΣΗΓΦΤ circumducta semicirculi minor est; sed *arc.* ΚΑΤ quidem circumducta semicirculi minor est, igitur sit *arc.* ΚΑΤΦ circumductae semicirculi aequalis. Rursus quoniam *arc.* ΣΒΥΤ circumducta semicirculi est, *arc.* ΛΣΒΤ circumducta semicirculi maior est; igitur ponatur *arc.* ΛΣΒΥ aequalis circumductae semicirculi, ergo semicirculus incipiens a puncto Κ, hoc est ΚΑΤΦ, non concurrit cum semicirculo a puncto Λ incipiente, hoc est, cum ΛΣΒΥ. Similiter etiam semicirculus ΚΣΗΓΦ non concurrit cum semicirculo ΛΔΤΥ; quocirca parallelorum circulorum arcus intercepti inter non concurrentes semicirculos circulorum maximorum sunt arcus ΚΡΛ, ΕΞΖ, ΑΝΒ, ΗΟΘ, ΓΠΔ *(b)*. Iam

a) Haec propositio apud Voegelinum collocata est post proxime sequentem.

b) Horum semicirculorum principia necessario ponenda sunt in ipsis contactibus Κ, Λ; etenim facto *arc.* Τα = *arc.* ΣΗ sequitur, ΗΟΤα esse semi-

dico, tum arcus ΚΡΛ, ΕΞΖ, ΑΝΒ quum arcus ΚΡΛ, ΗΟΘ, ΓΠΔ mutuo esse similes, sed maximorum circulorum arcus inter circulos parallelos interceptos aequales esse, hoc est, tum quattuor arcus ΕΚ, ΚΗ, ΖΛ, ΛΘ, tum quattuor arcus ΑΕ, ΒΖ, ΗΓ, ΘΔ aequales esse invicem.

Sumatur enim polus circulorum parallelorum, et sit punctum Μ, atque per Μ et utrumque punctum Κ, Λ describantur circuli maximi ΜΚΞΝ, ΜΛΟΠ.

Et quoniam in sphaera circuli duo ΑΕΚΗΓΦ, ΚΛ sese contingunt in puncto Κ, per polos autem unius, ΚΛ, et per contactum descriptus est circulus maximus ΜΚΞΝ; ergo circulus ΜΚΞΝ transibit etiam per polos circuli ΑΕΚΗΓΦ (5), e itque perpendicularis ad eum (I, 15). Similiter iam ostendemus, et ΜΛΟΠ transiturum esse per polos circuli ΒΖΛΘΔΤ, et perpendicularem fore ad eum. Atqui quoniam in circulorum aequalium ΑΕΚΗΓΤ, ΒΖΛΘΔΤ diametris ad rectos angulos insistunt in punctis Κ, Λ aequalia circuli segmenta ΚΜ, ΛΜ cum eo, quod superexcurrit, arcus autem eorum aequales ΚΜ, ΜΛ ablati sunt, dimidiis integrorum minores, et recta a puncto Μ ad Α iuncta aequalis est iunctae a puncto Μ ad Δ (I. *Def.* 5); ergo abscindent arcus aequales (11), quare *arc.* ΑΚ = *arc.* ΛΔ. Per eadem et *arc.* ΕΚ = *arc.* ΛΘ erit. Et quia in sphaera duo circuli ΑΒΓΔ, ΑΕΚΗΓΤ se invicem secant, perque polos eorum descriptus est circulus maximus ΜΚΞΝ, ideo ΜΚΞΝ bisecabit segmenta distincta, ergo *arc.* ΑΕΚ = *arc.* ΚΗΓ est, et *arc.* ΑΝ = *arc.* ΝΓ. Similiter iam ostendemus, esse quoque *arc.* ΒΛ = *arc.* ΛΔ, et *arc.* ΒΠ = *arc.* ΠΔ. Quoniam igitur

$$\begin{array}{rl} arc.\ \mathrm{AEK} & = arc.\ \Lambda\Theta\Delta \\ \text{et } 2\ arc.\ \mathrm{AEK} & = arc.\ \mathrm{AEKH}\Gamma \\ 2\ arc.\ \Lambda\Theta\Delta & = arc.\ \mathrm{BZ}\Lambda\Theta\Delta \\ \hline \text{ergo est } arc.\ \mathrm{AEKH}\Gamma & = arc.\ \mathrm{BZ}\Lambda\Theta\Delta. \end{array}$$

Aequales etiam circuli sunt, nam sunt maximi; quare recta a puncto Α ad Γ iuncta aequalis est iunctae a puncto Δ ad Β, ergo *arc.* ΑΒΓ = *arc.* ΔΓΒ.

---

circulum, qui quidem non concurrit cum semicirculo ΛΣΖΥ; de his autem non valet propositio, sed unice de illis in punctis Κ, Λ incipientibus.

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Est vero} & \tfrac{1}{2}\, arc.\, \mathrm{AB\Gamma} & = & arc.\, \mathrm{AN} \\
\text{et} & \tfrac{1}{2}\, arc.\, \mathrm{\Delta\Gamma B} & = & arc.\, \mathrm{B\Pi} \\
\hline
\text{igitur} & arc.\, \mathrm{AN} & = & arc.\, \mathrm{B\Pi}. \\
\text{Addito} & arc.\, \mathrm{NB} & = & arc.\, \mathrm{NB} \\
\hline
\text{prodit} & arc.\, \mathrm{ANB} & = & arc.\, \mathrm{NB\Pi}.
\end{array}$$

Et sunt eiusdem circuli, ergo *arc.* ANB ∾ *arc.* NBΠ est. Sed est *arc.* NBΠ ∾ *arc.* KΛ, nam si sint in sphaera circuli paralleli, per polos autem eorum descripti circuli maximi, circulorum parallelorum arcus inter circulos maximos intercepti similes sunt (10). Et sunt KΛ, NBΓΠ arcus circulorum parallelorum inter circulos maximos MN, MΠ, qui transeunt per polos illorum; ergo est *arc.* ANB ∾ *arc.* KΛ. Similiter iam ostendemus, esse quoque *arc.* EΞZ ∾ *arc.* KΛ, quare et *arc.* AB ∾ *arc.* EZ est. Insuper similiter ostendemus, esse *arc.* ΓΠΔ ∾ *arc.* HOΘ; itaque parallelorum circulorum arcus inter non concurrentes semicirculos circulorum maximorum intercepti similes sunt.

Iam dico, et maximorum circulorum arcus inter parallelos interceptos aequales esse.

Nam quia quattuor arcus AEK, KHΓ, BZΛ, ΛΘΔ mutuo aequales sunt, quorum partes quattuor EK, KH, ZΛ, ΛΘ invicem aequales sunt: [quia similiter circuli maximi KN, ΛΠ bisecant segmenta distincta EKH, EΞH atque ZΛΘ, ZOΘ, ita ut sit

$$\begin{array}{rrcl}
 & arc.\, \mathrm{EK} & = & arc.\, \mathrm{KH}, \\
\text{sed ostensus est} & arc.\, \mathrm{EK} & = & arc.\, \mathrm{\Lambda\Theta} \\
\hline
\text{quare} & arc.\, \mathrm{KH} & = & arc.\, \mathrm{\Lambda\Theta}. \\
\text{Est autem} & arc.\, \mathrm{\Lambda\Theta} & = & arc.\, \mathrm{\Lambda Z} \\
\hline
\text{itaque} & arc.\, \mathrm{\Lambda Z} & = & arc.\, \mathrm{KH};
\end{array}$$

quocirca quattuor arcus EK, KH, ZΛ, ΛΘ aequales sunt invicem,] ergo residui quattuor arcus AE, BZ, ΓH, ΘΔ mutuo sunt aequales. Itaque circulorum maximorum arcus inter circulos parallelos intercepti aequales sunt.

Propositio 14. Probl.

Datis in sphaera circulo minore quam maximo, et puncto aliquo in eius circuitu, describere circulum maximum per punctum illud, qui contingat datum.

Datus sit in sphaera circulus AB maximo minor, punctum autem in ambitu eius datum sit B; oportet igitur per punctum B describere circulum maximum, qui contingat circulum AB. F. 32.

Sumatur polus circuli AB, et sit Γ, et per puncta Γ, B describatur circuli maximi arcus ΓBΔ, atque auferatur *arc.* ΔB, aequalis arcui, quem subtendit latus quadrati in circulo maximo inscripti. Iam non potest fieri, ut arcus BΓ sit quadrans circuli, quippe alioqui maximus foret circulus AB, quod positum non est; ergo *arc.* ΓB non est quadrans; atque polo quidem Δ, intervallo autem ΔB describatur circulus EBZ, ideo EBZ est maximus, nam chorda ex polo eius aequalis est lateri quadrati in maximo circulo inscripti (I, 17) (*a*). Et quia in sphaera duo circuli AB, EBZ circuli cuiusdam maximi ambitum BΓΔ in eodem puncto B secant, polosque habent in ipso, circuli sese contingent; ergo circulus AB circulum EBZ continget. Proinde descriptus est circulus maximus EBZ circulum AB contingens in puncto B.

Propositio 15. Probl.

Dato in sphaera circulo minore quam maximo et puncto aliquo in superficie sphaerae, inter illum et aequalem ac parallelum sito, per illud punctum describere circulum maximum, qui contingat circulum datum.

Sit datus in sphaera circulus AB, maximo minor, punctum vero datum sit Γ in superficie sphaerae, situm inter ipsum AB et aequalem ei ac parallelum; iam oportet per punctum Γ describere circulum maximum, qui contingat circulum AB. F. 33.

Sumatur polus circuli AB et sit punctum Δ, et polo quidem Δ, intervallo autem ΔΓ describatur circulus ΓEZH, et per puncta Δ, Γ describatur circulus maximus ΔΓΘ, et sumatur *arc.* BΘ aequalis arcui, quem subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti, ac polo quidem Θ, intervallo

---

a) Si *arc.* BΓ quadrans esset, ac proinde AB circulus maximus, punctum Δ polus alter foret, igitur circulus polo quidem Δ et intervallo ΔB descriptus circulus maximus. Hinc positum est, *circ.* AB minorem esse maximo.

autem BΘ describatur circulus EBH; ergo maximus est circulus EBH, nam chorda ex polo eius aequalis est lateri quadrati inscripti in circulo maximo (I, 17). Continget etiam circulum AB, circuli enim duo EBH, AB circuli maximi ambitum ΔBΓΘ in eodem puncto B secant, polosque habent in ipso (3). Et per punctum Δ et utrumvis punctorum E, H describantur circuli maximi ΔMEK, ΔNHΛ, atque arcui ΓΘ sumatur aequalis uterque arcus EK, HΛ.

Et quoniam in sphaera circuli duo EBH, ZEΓH se invicem secant, per polos autem eorum descriptus est circulus maximus ΔBΓΘ, bifariam secabit circulorum segmenta distincta, quare *arc.* EΓ = *arc.* ΓH, et *arc.* EB = *arc.* BH. Et quia arcus ΔE, ΔΓ, ΔH invicem aequales sunt, nam sunt chordae ex polo circuli ZEH, et quia arcus ΔM, ΔB, ΔN mutuo sunt aequales, suntque arcus EK, ΓΘ, HΛ invicem aequales; ergo toti arcus MK, BΘ, NΛ vicissim aequales sunt. Atque est *arc.* BΘ aequalis arcui, quem subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti; ideo est arcus MK, NΛ aequales sunt arcui, quem subtendit latus quadrati in circulo maximo inscripti. Et quoniam in sphaera circulus maximus ΔBΓΘ sphaerae aliquem circulum ZEΓH per polos secat, secabit et bifariam et ad angulos rectos; quare circulus ΔBΓΘ ad perpendiculum est circulo ZEΓH. Similiter iam ostendemus, et circulum ΔNHΛ perpendicularem esse circulo ZEΓH, atque circulum ΔMEK circulo ZEΓH.

Iungantur ΛN, ΛΓ, ΘE. Et quoniam in circuli ZEΓH diametris in punctis Γ, H terminatis ad angulos rectos insistunt segmenta circulorum aequalia ΓΘ, HΛ cum eo quod superexcurrit, atque ablati sunt aequales eorum arcus ΓΘ, HΛ, dimidiis integrorum minores, et est *arc.* EΓ = *arc.* ΓH; ergo ΘE = ΛΓ est (12). Sed ΘE quadrati latus est (*a*), igitur ΛΓ quoque aequalis est lateri quadrati in maximo circulo inscripti. Verum etiam ΛN aequalis est lateri quadrati in maximo circulo inscripti, quare ΓΛ = ΛN; quocirca polo quidem Λ, intervallo autem ΛΓ descriptus circulus et per punctum N transibit. Transeat, sitque ut ΓNΞ, igitur *circ.* ΓNΞ maximus est,

---

a) Puta inscripti in circulo maximo.

nam chorda ex polo eius aequalis est lateri quadrati in maximo circulo descripti. Et quia in sphaera duo circuli ΓΝΞ, ΑΒ circuli maximi cuiusdam ambitum ΔΝΗΛ in eodem puncto Ν secant, polosque habent in ipso, contingent sese invicem, ideo ΓΝΞ continget circulum ΑΒ.

Similiter iam ostendemus, fore ut polo quidem Κ, intervallo autem ΚΓ descriptus circulus transeat etiam per punctum Μ. Si enim iungamus ΓΚ, ΘΗ, aequales erunt invicem; et est ΘΗ latus quadrati (*a*), quia chorda est ex polo circuli maximi ΕΒΗ, ergo ΚΓ quadrati latus erit (*a*); sed etiam ΚΜ, quare ΚΓ = ΚΜ est. Quocirca polo Κ, intervallo autem ΚΓ descriptus circulus transibit et per punctum Μ, eritque ut ΓΜΟ, atque continget circulum ΑΒ; unde duplici modo solvitur problema. Itaque per punctum datum Γ, quod est inter circulum ΑΒ et aequalem ei ac parallelum, descriptus est circulus maximus ΓΝΞ et ΓΝΟ. [Similiter enim quaeremus: Quoniam in circuli ΕΖΗΓ diametris in punctis Ε, Γ terminatis ad rectos angulos insistunt aequalia circulorum segmenta ΕΚ, ΓΘ cum eo, quod superexcurrit, atque est *arc.* ΕΓ = *arc.* ΓΗ; sequitur esse quoque ΓΚ = ΘΗ (12). Quadrati autem latus (*a*) est ΘΗ, est enim chorda ex polo circuli ΕΒΗ; ergo et ΓΚ et ΚΜ quadrati latus est (*a*). Proinde polo quidem Κ, intervallo autem altero punctorum Γ, Μ descriptus circulus transibit etiam per alterum, et manifesto continget circulum ΑΒ.

At si quis dicat, arcum illum aequalem lateri quadrati in circulo maximo inscripti esse ΒΓ, demonstratio erit, qualis sequitur.

Quoniam est

$$\begin{array}{c} arc.\,\Delta\Gamma = arc.\,\Delta E = arc.\,\Delta H \\ \text{et } arc.\,\Delta B = arc.\,\Delta M = arc.\,\Delta N \\ \hline \end{array}$$ F. 34.

est residuus *arc.* ΒΓ = *arc.* ΕΜ = *arc.* ΝΗ;

sed *arc.* ΒΓ quadrans est, igitur uterque arcus ΝΗ, ΕΜ quadrans est. Quoniam igitur quadrans est et *arc.* ΗΝ et *arc.* ΗΓ, sequitur esse *arc.* ΝΗ = *arc.* ΓΗ; itaque polo quidem Η, intervallo autem ΓΗ descriptus circulus transibit per punctum Ν. Similiter iam ostendemus, fore quoque, ut polo quidem Ε, intervallo autem ΕΓ descriptus circulus transeat per punctum Μ; ideoque duplex erit solutio problematis.]

a) Vid. pag. 116.

Propositio 16. Theor.

Circuli maximi, qui similes arcus parallelorum quorundam circulorum in sphaera intercipiunt, aut sunt per polos circulorum parallelorum, aut eundem parallelorum contingunt.

Etenim in sphaera circuli maximi ΑΗΓ, ΒΖΘΔ circulorum quorundam parallelorum ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ arcus similes interci-
F. 35. piant inter sese, hoc est, sit *arc.* ΑΒ $\backsim$ *arc.* ΕΖ; dico, circu-
F. 36. F. 37. los ΑΗΓ, ΒΖΘΔ aut pervadere per polos parallelorum, aut contingere parallelorum eundem.

Etenim circulus ΑΗΓ aut est per polos parallelorum, aut non.

Prima delineatio.

Sit primum per polos parallelorum; dico, et circulum ΒΘΔ esse per polos parallelorum, hoc est, punctum Κ polum esse circulorum parallelorum ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ.

Non enim, sed, si fieri potest, punctum Λ polus sit parallelorum, et per puncta Λ, Ζ describatur circulus maximus ΛΖΜ; ergo est *arc.* ΑΒΜ $\backsim$ arc. ΕΖ (10). Sed est *arc.* ΕΖ $\backsim$ *arc.* ΑΒ, igitur *arc.* ΑΜ $\backsim$ *arc.* ΑΒ, suntque eiusdem circuli, quare *arc.* ΑΜ $=$ *arc.* ΑΒ est, maior minori, quod repugnat. Itaque punctum Λ non est polus parallelorum. Similiter iam ostendemus, nullum aliud, praeter punctum Κ (*a*); ergo punctum Κ polus est parallelorum. Igitur circuli ΑΗΓ, ΒΘΔ pervadunt per polos parallelorum.

Secunda delineatio.

F. 36. Verum rursus iam non sit per polos parallelorum circulus ΑΗΓ. Proinde aut continget circulum ΕΖΘ, aut obliquus erit ad eum (*b*).

Primum contingat in puncto Ε, uti se habet in altera delineatione; dico, fore ut eum contingat etiam circulus ΖΒ.

Si enim fieri potest, non contingat (*c*), et describatur per

---

a) Etenim alterius poli, polo Κ e diametro oppositi, ratio hic non habetur.

b) Exquisitius: „aut secabit eum ad angulos obliquos". Nam si ad angulos rectos secaret, transiturus esset per polos.

c) Adde: „sed secet alicubi in puncto Ζ, ita ut sit *arc.* ΕΖ $\backsim$ *arc.* ΑΒ".

punctum Z circulus maximus ZΓ, ita contingens circulum EZΘ, ut semicirculum a ZΓ incipientem faciat non concurrentem cum semicirculo ab EA incipiente; unde sequitur *arc.* ΓA $\backsim$ *arc.* EZ (13). Sed est *arc.* EZ $\backsim$ *arc.* AB (*a*), igitur *arc.* ΓA $\backsim$ *arc.* AB; suntque unius circuli, quare *arc.* ΓA = *arc.* AB, quod fieri nequit. Non ergo circulus BZ non continget circulum EZΘ, ergo continget.

Tertia delineatio.

Sed iam circulus AHΓ obliquus sit ad circulos parallelos, uti se habet in delineatione tertia; igitur continget circulos duos aequales quidem invicem, sed parallelos circulis ABΓΔ, EZHΘ (8); dico, etiam circulum BZΘΔ obliquum esse ad parallelos, atque contacturum esse circulum eundem (*b*). Nam si fieri potest, circulus quidem AEHΓ contingat parallelorum unum MΞ in puncto Λ, sed circulus BZΘΔ non contingat; atque per punctum Z, quod sit inter circulum ΛM et inter aequalem ei ac parallelum, describatur circulus maximus NZM, ita contingens circulum ΛM in puncto M, ut semicirculum a ΛA incipientem faciat non concurrentem cum semicirculo a MN incipiente. F. 37.

Est ergo *arc.* ABN $\backsim$ *arc.* EZ, sed etiam *arc.* EZ $\backsim$ *arc.* AB, igitur est *arc.* ABN $\backsim$ *arc.* AB, suntque eiusdem circuli, quare *arc.* NA = *arc.* AB, idque repugnat. Non ergo circulus ΔΘB non continget circulum ΛM, continget ergo. Quapropter circuli AEHΓ, BZΘΔ parallelorum circulorum contingunt eundem.

Propositio 17. Theor.

Circuli paralleli in sphaera, qui versus maximum parallelorum (*c*) *aequales arcus maximi alicuius circuli auferunt, sunt aequales, qui vero maiores, minores sunt.*

Etenim in sphaera circuli paralleli AB, ΓΔ maximi cuiusdam circuli AB, ΓΔ arcum BZ arcui ΓZ aequalem auferant ver- F. 38.

a) Ex hypothesi.

b) Proprius: „circulos eosdem“, nimirum eos, quos circulus AEHΓ contingit.

c) Sive versus eum parallelorum circulorum, qui et ipse circulus maximus est.

sus maximum parallelorum EZ; dico, circulum AB aequalem esse circulo ΓΔ.

Sit enim circuli AB et ABΓΔ intersectio recta AB, circuli autem EZ et ABΓΔ intersectio sit recta EZ, atque circuli ΓΔ et ABΓΔ intersectio sit recta ΓΔ.

Iam quia duo plana parallela EΘZ, ΓKΔ a plano quodam circuli ABΓΔ secantur, intersectiones eorum parallelas esse consequitur (*E.* XI, 16); ergo est EZ ∦ ΓΔ. Similiter iam ostendemus, esse quoque AB ∦ EZ. Et quoniam in circulo ABΓΔ duae parallelae EZ, ΓΔ ductae sunt, sequitur *arc.* ΔE = *arc.* ΓZ. Si enim duxerimus rectam EΓ, aequales erunt anguli alterni (*E.* I, 29); sed in circulis aequalibus anguli aequales intercipiunt arcus aequales (*E.* III, 26), proin est *arc.* EΔ = *arc.* ZΓ. Similiter iam ostendemus, esse quoque *arc.* BZ = *arc.* AE; sed est *arc.* BZ = *arc.* ZΓ, ergo et *arc.* AE = *arc.* EΔ, itaque *arc.* AE + *arc.* BZ = *arc.* EΔ + *arc.* ZΓ. Quoniam igitur *arc.* EAΛBZ = *arc.* ZΓMΔE, nam circuli EΘZ, ABΓΔ maximi sunt, et quoniam est *arc.* EA + *arc.* ZB = *arc.* EΔ + *arc.* ZΓ, igitur residuus *arc.* AΛB = *arc.* ΔMΓ residuo, suntque eiusdem circuli, quocirca est AB = ΓΔ (*E.* III, 29).

Iam circulus ABΓΔ circulos AHB, ΔKΓ aut secat per polos, aut non secat.

Secet primum per polos, ergo bisecabit (I, 15), igitur recta AB quidem diameter est circuli AHB, recta ΔΓ vero diameter circuli ΔKΓ, atque AB = ΓΔ, ideo *circ.* AHB = *circ.* ΓKΔ.

Sed rursus circulus ABΓΔ circulos AHB, ΓKΔ iam non secet per polos, et sumatur polus parallelorum (I, 21), sitque punctum N, ac describatur circulus maximus ΛΘKMΞ per punctum N et per unum polorum circuli ABΓΔ, sumaturque *arc.* ΛN = *arc.* MΞ. Quoniam igitur est

arc. ΛN = *arc.* MΞ,
addito *arc.* NKM = *arc.* NKM
prodit *arc.* ΛHM = *arc.* NKMΞ.

Verum ΛKM est circumducta semicirculi, ideo et NHMΞ semicirculi circumducta est, ergo punctum N puncto Ξ e diametro oppositum est, et punctum N parallelorum circulorum polus est; quocirca punctum Ξ polus alter est circulorum parallelorum.

Et quoniam in sphaera duo circuli ΑΒΓΔ, ΔΚΓ secant se invicem, per polos autem eorum descriptus est circulus maximus ΛΘΚΞ, igitur circulus ΛΘΚΞ bisecabit circulorum segmenta distincta (9); quare *arc.* ΓΜ = *arc.* ΜΔ et ob id *arc.* ΓΜΔ = 2 *arc.* ΜΓ. Similiter iam ostendemus, esse quoque *arc.* ΑΛΒ = 2 *arc.* ΑΛ; estque *arc.* ΔΜΓ = *arc.* ΑΛΒ, igitur *arc.* ΜΔ = *arc.* ΑΛ. Quodsi in circuli ΑΒΓΔ diametro puncto Λ, Μ iungente ad angulos rectos insistunt segmenta circuli aequalia ΛΘΚΜ et ΜΞ cum eo quod superexcurrit, atque ablati sunt ab iis arcus aequales ΛΝ, ΜΞ, dimidiis integrorum minores, a circulo autem primo posito abscissi sunt arcus aequales ΑΛ, ΜΓ; recta igitur a puncto Ν ad Α iuncta aequalis est rectae a Ξ ad Γ iunctae (12). Equidem recta a puncto Ν ad Α iuncta chorda est ex polo circuli ΑΗΒ, recta vero a Ξ ad Γ iuncta chorda ex polo circuli ΓΚΔ est; quare chorda ex polo circuli ΑΗΒ aequalis est chordae ex polo circuli ΔΚΓ. Sed quorum circulorum chordae ex polis aequales sunt, ipsi aequales circuli sunt (*Append.* I, 21 *b*), ideo *circ.* ΑΗΒ = *circ.* ΔΚΓ.

Rursus autem sit *arc.* ΓΖ $>$ *arc.* ΒΖ; dico, esse *circ.* ΔΚΓ $<$ *circ.* ΑΗΒ. F. 39.

Quoniam enim est *arc.* ΓΖ $>$ *arc.* ΖΒ, ab arcu ΓΖ auferatur *arc.* ΖΒ = *arc.* ΖΟ, et per punctum Ο describatur circulus ΟΡΠ parallelus circulo ΕΘΖ; igitur est *circ.* ΠΡΟ = *circ.* ΑΗΒ, nam est *arc.* ΟΖ = *arc.* ΖΒ. Sed est *circ.* ΠΡΟ $>$ *circ.* ΔΚΓ, propinquior enim centro sphaerae circulus ΠΡΟ est, quam circulus ΔΚΓ; et proinde *circ.* ΑΗΒ $>$ *circ.* ΔΚΓ, sive *circ.* ΔΚΓ $<$ *circ.* ΑΗΒ.

Propositio 18. Theor.

Circuli in sphaera aequales ac paralleli versus maximum parallelorum maximi alicuius circuli auferunt arcus aequales, maiores autem minores.

Etenim in sphaera aequales ac paralleli circuli ΑΒ, ΓΔ maximi alicuius circuli ΑΒΓΔ arcus ΒΖ, ΖΔ abscindant versus parallelorum maximum ΕΖ; dico, esse *arc.* ΒΖ = *arc.* ΖΔ. F. 40.

Si enim non est *arc.* ΒΖ = *arc.* ΖΔ, consequens est, non

esse *circ.* AB = *circ.* ΓΔ (17); est vero; ergo et *arc.* BZ = *arc.* ZΔ est.

Sed rursum sit *circ.* AB > *circ.* ΓΔ; dico, esse *arc.* BZ < *arc.* ZΔ.

Si enim non est *arc.* BZ < *arc.* ZΔ, consequens est, non esse *circ.* AB > *circ.* ΓΔ (*a*); est vero; ergo est *arc.* BZ < *arc.* ZΔ.

Propositio 19. Theor.

Si maximus in sphaera circulus parallelos aliquot sphaerae circulos secet non per polos, in partes inaequales secabit, excepto maximo parallelorum. Ablatorum autem segmentorum in uno hemisphaeriorum maiora quidem erunt semicirculis, quotquot sunt inter maximum parallelorum et polum apparentem (b); reliqua vero minora, quotquot sunt inter maximum parallelorum et polum occultum. Circulorum denique aequalium ac parallelorum segmenta inverso ordine aequalia sunt.

F. 41. Nam in sphaera maximus circulus ABΓΔ circulos aliquot sphaerae parallelos AΔ, EZ, BZ secet non per polos, maximus autem parallelorum sit EZ; dico, fore, ut hos in partes inaequales secet, excepto parallelorum maximo EZ, atque ut segmentorum ablatorum in uno hemisphaeriorum maiora quidem sint semicirculis, quotquot sunt inter EZ et polum apparentem, reliqua vero minora; denique ut circulorum aequalium ac parallelorum segmenta inverso ordine aequalia sint.

Sit enim polus apparens parallelorum punctum H, et per E, H describatur maximus circulus HEΘ; ergo circulus HEΘ completus transibit etiam per punctum Z, ideo punctum E puncto Z e diametro est, propterea quod circulorum EZ, ABΓΔ uterque maximus est. Transeat, sitque ut HNZK, et compleatur circulus BΓ usque ad puncta Θ, K.

Quoniam igitur maximus in sphaera circulus ΘEMHNZK

---

a) Si enim est *arc* BZ $\geqq$ *arc.* ZΔ, sequitur *circ.* AB $\leqq$ *circ.* ΓΔ (17).

b) Finge tibi sphaeram bipartito divisam circulo illo maximo primum posito; igitur in alterutro hemisphaerio alter polus est circulorum parallelorum; apparens autem dicitur is, qui est in hemisphaerio, cuius ad intuentem superficies convexa advertitur,

aliquot sphaerae circulos AMNΔ, EZ, ΘBΓK secat per polos, bifariam secabit et ad angulos rectos (I, 15), ergo semicirculi sunt singuli MN, EZ, ΘBΓK. Quodsi MN semicirculus est, ergo segmentum AMNΔ semicirculo maius est. Similiter iam ostendemus, omnia quoque segmenta inter circulum EZ et polum H semicirculis maiora esse.

Rursus quia ΘBΓK semicirculus est, segmentum BΓ minus est semicirculo. Similiter iam ostendemus, omnia quoque segmenta inter circulum EZ et polum apparentem, atque sita in eodem hemisphaerio, semicirculis minora esse.

Sed iam rursus sit circulus AΔ circulo BΓ aequalis ac parallelus; dico, circulorum AΔ, BΓ segmenta ordine inverso esse aequalia.

Nam quoniam circulus AΔ circulo BΓ aequalis est et parallelus, sequitur esse $arc.\, AE = arc.\, EB$ et $arc.\, \Delta Z = arc.\, Z\Gamma$ (18) [sed est $arc.\, AE = arc.\, \Delta Z$, et $arc.\, EB = arc.\, Z\Gamma$]; igitur

$$arc.\, AE + arc.\, \Delta Z = arc.\, EB + arc.\, Z\Gamma,$$

est autem $arc.\, EA\Delta Z = arc.\, EB\Gamma Z$

ergo residuus est $arc.\, A\Delta = arc.\, B\Gamma$,

quia semicirculi arcus est uterque EAΔZ, EBΓZ, nam maximi sunt ABΓΔ, EZ. Suntque eiusdem circuli arcus AΔ, BΓ, quocirca recta a puncto A ad Δ iuncta aequalis est rectae a B ad Γ iunctae; atque recta a puncto A ad Δ iuncta est chorda arcus AΔ, recta vero a puncto B ad Γ est chorda arcus BΓ (a); et in circulis aequalibus rectae aequales auferunt arcus aequales, maiorem quidem maiori, minorem autem minori (*E.* III, 28); idcirco circuli AΔ maior quidem arcus arcui maiori circuli BΓ, sed minor arcus circuli AΔ aequalis est arcui minori circuli BΓ. Atqui segmentum AΔ semicirculo maius est, BΓ autem minus, ergo segmenta circulorum AΔ, BΓ aequalia sunt invicem ordine inverso.

Propositio 20. Theor.

Si circulus maximus in sphaera parallelos aliquot sphaerae circulos secet non per polos, ablatorum arcuum in uno hemisphae-

---

a) Arcus AΔ, BΓ nunc referuntur ad circulos aequales AΛΔ, ΘBΓK, priori loco ad circulum ABΓΔ.

riorum polo apparenti (a) *propinquiores maiores quam similes erunt remotioribus.*

F. 42. F. 43. Etenim in sphaera circulus maximus ΑΒΓΔ aliquot sphaerae circulos ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ secet non per polos; dico, arcuum ablatorum in uno hemisphaeriorum polo apparenti propinquiores maiores quam similes fore remotioribus, id est, arcum ΑΒ esse maiorem quam similem arcui ΓΔ, arcum ΓΔ autem maiorem quam similem arcui ΕΖ.

Sit enim polus apparens parallelorum punctum Η, et per Η et utrumque Γ, Δ describantur circuli maximi ΗΘΓ, ΗΚΔ.

Igitur circuli ΗΘΓ, ΗΚΔ intercipiunt arcus similes inter se iacentes (10), quare est *arc.* ΘΚ ∾ *arc.* ΓΔ, et inde *arc.* ΑΘΚΒ maior quam similis *arcui* ΓΔ est. Similiter iam ostendemus, et *arc.* ΓΔ maiorem esse quam similem *arcui* ΕΖ, describentibus nobis circulos maximos per Η et per utrumque Ε, Ζ.

Potest autem demonstrari et non describentibus nobis, sed complentibus solummodo circulos ΗΘΓ, ΗΚΔ, ΕΖ, ut in theoremate [praecedente].

Propositio 21. Theor.

Si in sphaeris aequalibus maximi circuli inclinentur ad maximos circulos, cuiuscunque eorum polus sublimior sit, magis inclinatus erit, quorum tamen circulorum poli aequaliter distant a planis, similiter inclinati sunt.

F. 44. Etenim in sphaeris aequalibus circuli maximi ΒΚΔ, ΖΛΘ ad circulos maximos ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ sint inclinati, et polus quidem circuli ΒΚΔ sit punctum Μ, polus autem circuli ΖΛΘ sit punctum Ν, sitque sublimius Μ puncto Ν; dico, circulum ΒΚΔ ad circulum ΑΒΓΔ magis esse inclinatum, quam circulum ΖΛΘ ad ΕΖΗΘ.

Describatur per Μ et per unum circuli ΑΒΓΔ polorum maximus circulus ΑΚΜΓ, per Ν autem et per unum circuli ΕΖΗΘ polorum maximus circulus ΕΛΝΗ; atque sit circuli quidem ΑΒΓΔ et circuli ΒΚΔ intersectio ΒΔ, circuli autem

a) Respice 19. *b*.

ABΓΔ et circuli AKMΓ intersectio AΓ, circuli BKΔ et AKMΓ intersectio KΞ; itemque sit circuli EZHΘ et circuli ZΛΘ intersectio ZΘ, circuli autem EZHΘ et EΛNH intersectio EH, et circuli EΛNH et ZΛΘ intersectio ΛO.

Et quoniam in sphaera maximus circulus AKMΓ quosdam sphaerae circulos ABΓΔ, BKΔ secat per polos, secabit et bifariam et ad angulos rectos (I, 15); ideo circulus AKMΓ perpendicularis est ad utrumque circulorum ABΓΔ, BKΔ, quare circulorum ABΓΔ, BKΔ utervis perpendicularis est ad circulum AKMΓ. Verum si plana duo se invicem secantia perpendicularia sint plano alicui, erit quoque intersectio communis eorum ad angulos rectos plano eidem (*E.* XI, 19); hinc intersectio communis BΔ circulorum ABΓΔ, BKΔ perpendicularis est ad circulum AKMΓ, quare et cum omnibus ei occurrentibus et sitis in eodem plano circuli AKMΓ, rectos constituet angulos. Occurrit autem rectae BΞΔ utraque rectarum KΞ, ΞA sita in plano circuli AKMΓ, igitur BΞ ad utramque rectarum KΞ, ΞA perpendicularis est. Et quoniam duo plana ABΓΔ, BKΔ secant sese invicem, et intersectioni eorum communi BΔ ad angulos rectos ductae sunt KΞ, ΞA, recta quidem KΞ in plano circuli BKΔ, recta vero ΞA in plano circuli ABΓΔ; ergo angulus KΞA inclinatio est, qua planum BKΔ ad planum ABΓΔ inclinatur (*E.* XI. *Def.* 6). Similiter iam ostendemus, et angulum ΛOE inclinationem esse, qua planum ZΛΘ ad planum EZΘ inclinatur. Ideo dico, esse KΞA < ΛOE.

Nam quia sublimius est punctum M puncto N, perpendicularis ex puncto M ad planum circuli ABΓΔ demissa maior est, quam demissa ex puncto N ad planum circuli EZHΘ. Sed perpendicularis ex puncto M demissa ad planum circuli ABΓΔ cadit in intersectionem circuli AKMΓ et circuli ABΓΔ, hoc est, in rectam AΓ, eo quod plana AKMΓ, ABΓΔ sibi invicem sunt perpendicularia (*E.* XI, 38), demissa vero perpendicularis ex puncto N ad planum circuli EZHΘ cadit in rectam EH; ergo perpendicularis a puncto M demissa ad AΓ maior est demissa perpendiculari a N ad EH. Quoniam igitur duo circulorum segmenta AKMΓ, EΛNH aequalia sunt, ac duo

puncta utcunque posita M, N (*a*), et perpendicularis a puncto M demissa ad ΑΓ maior est, quam demissa a N ad EH; sequitur, esse *arc.* ΜΓ > *arc.* NH. Verum est *arc.* MK = *arc.* NΛ, quippe quorum uterque aequalis est arcui, quem subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti; proinde est *arc.* KΜΓ > *arc.* ΛNH. Quoniam igitur est

arc. AKΜΓ = *arc.* EΛNH,

et demto *arc.* KΜΓ > *arc.* ΛNH.

reliquus est *arc.* AK < *arc.* EΛ.

Atque innititur arcui quidem AK angulus KΞA, arcui autem ΛE angulus ΛOE, hinc etiam est KΞA < ΛOE. Et quoniam angulus KΞA quidem inclinatio est, qua inclinatur planum BKΔ ad planum circuli ΑΒΓΔ, angulus ΛOE autem inclinatio, qua planum ZΛΘ inclinatur ad planum EZHΘ; sequitur, inclinationem circuli BKΔ ad circulum ΑΒΓΔ minorem esse inclinatione circuli ZΛΘ ad circulum EZHΘ. Itaque circulus BKΔ ad circulum ΑΒΓΔ magis inclinatur, quam circulus ZΛΘ ad circulum EZHΘ (*b*).

Sed iam rursus circulorum BKΔ, ZΛΘ poli aequaliter distent a planis, hoc est, perpendiculum a puncto M ad planum circuli ΑΒΓΔ demissum aequale sit perpendiculo a puncto N demisso ad planum circuli EZHΘ; dico, circulos BKΔ, ZΛΘ ad circulos ΑΒΓΔ, EZHΘ similiter inclinari, id est, KΞA = ΛOE esse.

Nam constructis iisdem similiter iam ostendemus, angulum

---

a) Puncta M, N pro arbitrio constituta sunt, quatenus ad semicirculos ΑΜΓ, ENH pertinent, neque tamen, quatenus poli sunt circulorum BKΔ, ZΛΘ. Iam puncta M, N dividunt semicirculos ΑΜΓ, ENH in partes inaequales, ideo sit *arc.* AM > *arc.* ΜΓ, et *arc.* EN > NH, quibus quidem positis sequitur, esse *arc.* ΜΓ > *arc.* NH, quia polus M sublimior positus est quam polus N: verum non positis illis fieri potest, ut polus N proprior sit puncto E quam puncto H, utque nihilo secius punctum N humilius sit puncto M, unde foret *arc.* NH > *arc.* ΜΓ. Theodosium statuo praetermisisse postulationes illas ea de causa, quod circulos ΑΒΓΔ, EZHΘ bases existimaverit, semicirculos autem ΑΒΓΔ, EZHΘ non infra sed supra positos. Ita certe arcus ΜΓ, NH, semper sunt partes minores semicirculorum ΑΓ, EH, neque est, quod impediat demonstrationis processum.

b) Cfr. monita in additamentis ad I. *Def.* 5 *d*.

KΞA quidem esse inclinationem, qua planum circuli BKΔ inclinatur ad planum circuli ΑΒΓΔ, sed angulum ΛOE inclinationem esse, qua planum circuli ZΛΘ ad planum circuli EZHΘ; inde dico, esse KΞA = ΛOE.

Quoniam igitur duo circulorum segmenta AKMΓ, EΛNH aequalia sunt, et puncta MN utcunque sita (a), atque perpendiculum a puncto M ad AΓ demissum aequale est perpendiculo a N ad EH demisso; ergo et *arc.* MΓ = *arc.* HN est. Atque est *arc.* MK = *arc.* ΛN, quippe quum uterque aequalis sit arcui, quem subtendit latus quadrati in maximo circulo descripti; igitur etiam est

arc. KMΓ = *arc.* ΛNH,
verum est *arc.* AKMΓ = *arc.* EΛNH,
unde prodit *arc.* AK = *arc.* EΛ.

Nititur etiam arcui quidem AK angulus KΞA, arcui ΛE autem angulus ΛOE, hinc est KΞA = ΛOE. Et est angulus KΞA inclinatio, qua planum circuli BKΔ inclinatur ad circuli ΑΒΓΔ planum, angulus ΛOE autem inclinatio est, qua planum circuli ZΛΘ inclinatur ad planum circuli EZHΘ; proinde circuli BKΔ ad circulum ΑΒΓΔ inclinatio aequalis est inclinationi circuli ZΛΘ ad circulum EZHΘ.

Circuli ergo BKΔ, ZΛΘ ad circulos ΑΒΓΔ, EZHΘ similiter inclinati sunt. Nam edocti sumus, planum ad planum dici inclinari similiter atque alterum ad alterum, quando rectae, in utroque plano planorum intersectioni ad angulos rectos ductae, in iisdem punctis angulos aequales comprehendant (I. *Def.* 6).

Propositio 22. Theor.

Si in sphaera maximus circulus circulum aliquem sphaerae contingat, alium vero secet huic parallelum et iacentem inter centrum sphaerae et circulum, quem contingit maximus; si praeterea polus circuli maximi sit inter circulos hos parallelos, et describantur circuli maximi contingentes maximum parallelorum; inclinati erunt ad circulum maximum, et rectissimus quidem erit is, cuius contactus est in eo puncto, quo bifariam dividitur segmen-

a) Respice notam *a* pg. 126.

tum maius, humillimus autem, cuius contactus est in eo puncto, quo bifariam dividitur segmentum minus; reliquorum contra similiter erunt inclinati, qui aequaliter distant ab alterutro punctorum, in quibus segmenta bifariam secantur; ita tamen ut qui contactum remotiorem habet a puncto, in quo maius segmentum bisecatur, propinquiore magis semper sit inclinatus. Poli denique maximorum erunt in uno circulo et parallelo et minore quam est ille, quem contingit circulus maximus primo positus.

F. 45. Nam in sphaera circulus maximus ΑΒΓ contingat aliquem sphaerae circulum ΑΔ in puncto Α, secet vero alium ΕΖΗΘ parallelum ei situmque inter centrum sphaerae et circulum ΑΔ; praeterea polus sit circuli ΑΒΓ inter circulos ΑΔ, ΕΖΗΘ, sitque punctum Κ, et describantur circuli maximi ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΘΥ contingentes parallelorum maximum ΕΖΗΘ, et sit circulus ΒΖΓ quidem per punctum Ζ, in quo bifariam dividitur segmentum maius circuli ΕΖΗΘ, circulus ΥΘ autem per punctum Θ, in quo bifariam dividitur segmentum minus circuli ΕΖΗΘ, circuli ΜΝΞ, ΟΠΡ vero aequaliter distent ab alterutro punctorum, in quibus segmenta bisecantur, circulusque ΤΣ contingat utcunque (*a*); dico, fore ut circuli ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ inclinati sint ad circulum ΑΒΓ, et rectissimum quidem esse ΒΖΓ, humillimum autem ΥΘ, circulos vero ΜΝΞ, ΟΠΡ similiter esse inclinatos, et circulum ΣΤ ad circulum ΑΒΓ magis inclinatum, quam *circ.* ΟΠΡ; polos denique circulorum ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ in uno esse circulo et parallelo et minore quam *circ.* ΑΔ.

Sumatur enim polus parallelorum ΑΔ, ΕΖΗΘ, sitque punctum Λ, et per punctum Α, Λ describatur circulus maximus ΑΛ. Et quoniam in sphaera duo circuli ΑΒΓ, ΑΔ contingunt sese, per polos autem unius perque contactum descriptus circulus est maximus ΑΛ; transibit ergo circulus ΑΛ etiam per polos circuli ΑΒΓ (5), eritque ei ad perpendiculum (I, 15.). Et punctum Κ polus est circuli ΑΒΓ, inde circulus ΑΛ completus pervadet etiam per Κ. Transeat, et sit uti ΑΛΚ. Iam quoniam in sphaera duo circuli ΑΒΓ,ΕΖΗΘ secant se invicem, descriptus autem est per polos eorum circulus maximus ΑΛΚ,

a) Ita tamen, ut contactus Τ remotior sit a puncto Ζ, quam puncta Ν, Π.

ergo bifariam secabit circulus ΛΛK segmenta distincta (9). Atque Z quidem punctum est, in quo segmentum EZH bifariam dividitur, Θ autem punctum, in quo segmentum EΘH; circulus ΑΛΚ igitur completus pervadet etiam per puncta Z, Θ. Transeat, sitque ut ΘΑΛΚΖ. Et quoniam punctum K polus est circuli ΑΒΓ, estque circulus ΑΒΓ maximus, sequitur, esse *arc.* AK aequalem arcui, quem subtendit latus quadrati in circulo maximo inscripti. Et quia circulus EZHΘ maximo minor, et situs est inter centrum sphaerae circulumque ΑΔ, ac polus eius punctum Λ; igitur *arc.* ΛZ minor est, quam is, quem subtendit latus quadrati in maximo circulo inscripti. Quoniam igitur *arc.* ΛKZ maior est, quam is, quem subtendit latus quadrati in circulo maximo descripti, *arc.* ΛZ autem minor; ergo si arcum aequalem ei, quem subtendit latus quadrati in circulo maximo inscripti, abscindamus inde a puncto Z, cadet inter puncta Α, Λ. Ablatus sit, et sit *arc.* ZΦ, et polo quidem Λ intervallo autem ΛΦ describatur circulus ΦΧΨΩ, parallelus erit circulis ΑΔ, EZHΘ. Et describantur circuli maximi ΝΛΩ, ΠΛΧ, ΤΛΨ per punctum Λ et per singula puncta Π, Ν, Τ.

Quodsi est *arc.* ΝΛ = *arc.* ΛZ, sunt enim ex polo circuli EZHΘ, et *arc.* ΛΩ = *arc.* ΛΦ, quippe qui ex polo circuli ΦΧΨΩ; consequitur, esse totum *arc.* ΝΛΩ = *arc.* ZΛΦ toti. Est etiam *arc.* ZΛΦ aequalis arcui, quem subtendit latus quadrati in circulo maximo inscripti, *arc.* ΝΛΩ igitur aequalis est ei, quem latus quadrati subtendit, in maximo circulo inscripti. Similiter iam ostendemus, quemlibet etiam arcuum ΧΛΠ, ΨΛΤ, τΛΘ aequalem esse arcui, quem latus quadrati subtendit, in maximo circulo inscripti. Et quia in sphaera duo circuli ΜΝΞ, EZHΘ contingunt sese, per polos autem unius EZHΘ et per contactum descriptus est circulus maximus ΝΛΩ; circulus ΝΛΩ ergo pervadet etiam per polos circuli ΜΝΞ (5), et perpendicularis erit ad eum (I, 15.). Et quoniam circulus ΜΝΞ maximus est, arcus ex polo eius aequalis est ei, quem subtendit latus quadrati in circulo maximo inscripti; atqui *arc.* ΝΛΩ aequalis est ei, quem latus quadrati in circulo maximo descripti subtendit, arcus ergo ductus a puncto Ν ad Ω est arcus ex polo circuli ΜΝΞ, et proinde punctum Ω polus est circuli ΜΝΞ. Similiter iam ostendemus, punctum quidem

Φ polum esse circuli ΒΖΓ, punctum Χ autem circuli ΟΠΡ, et Ψ circuli ΣΤ, denique τ circuli ΥΘ; hinc circuli ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ polos habent in uno eodemque circulo et parallelo et minore quam ΑΔ.

Iam dico, circulos ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ inclinari ad *circ.* ΑΒΓ, et rectissimum quidem eorum esse *circ.* ΒΖΓ, humillimum vero *circ.* ΥΘ, atque circulos ΜΝΞ, ΟΠΡ similiter inclinatos esse, *circ.* ΣΤ ad *circ.* ΑΒΓ autem magis esse inclinatum, quam *circ.* ΟΠΡ ad *circ.* ΑΒΓ.

Etenim quia est *arc.* ΝΖ = *arc.* ΖΠ, suntque eiusdem circuli; sequitur esse *arc.* ΝΖ ∾ *arc.* ΖΠ. Verum est *arc.* ΝΖ ∾ *arc.* ςτ, et *arc.* ΖΠ ∾ *arc.* τη, et sunt eiusdem circuli; proinde est *arc.* ςτ = *arc.* ητ. Sed est *arc.* ητ = *arc.* ΧΦ, nam sunt oppositi ad verticem, et *arc.* ςτ = *arc.* ΦΩ; ergo *arc.* ΦΩ = *arc.* ΧΦ. Sed iam in circuli alicuius ΦΧΨΩ diametro a puncto Φ ad τ ducta circuli segmentum ΦΚτ insistit ad perpendiculum (*a*), et ablatus est arcus τΚ, dimidio arcu totius segmenti minor (*b*), atque circuli primo positi aequales arcus ΧΦ, ΦΩ ablati sunt (*c*); itaque recta a puncto Κ ad ∾ Χ iuncta aequalis est rectae a puncto Κ ad Ω iunctae (12); quare polo quidem Κ, intervallo autem ΚΧ descriptus circulus pervadet etiam per Ω. Transeat, sitque ut *circ.* ΧΙΩ, ergo est *circ.* ΧΙΩ ‡ *circ.* ΑΒΓ, quippe quum circa eosdem polos sit, nam punctum Κ polus est circuli ΑΒΓ. Et quoniam est *circ.* ΧΙΩ ‡ *circ.* ΑΒΓ, perpendicularis ducta a Χ ad planum circuli ΑΒΓ aequalis est perpendiculari a puncto Ω ad planum circuli ΑΒΓ. Atque perpendicularis a puncto Ι ducta aequalis est utrique a punctis Χ, Ω demissae perpendiculari, sed perpendicularis a puncto Ι demissa ad planum circuli ΑΒΓ maior est, quam a puncto Φ ad planum circuli ΑΒΓ demissa (*d*), qua-

a) Circulo maximo ΘΚΖ completo prodibit segmentum illud ΦΚτ, quod hic loci noster intelligit.

b) *Arc.* ΚΛΑ circuli quadrans est, unde *arc.* τΚ minor quadrante. Sed totus *arc.* ΦΚτ maior est quam duae quadrantes simul sumtae, ergo *arc.* τΚ < ½ *arc.* ΦΚτ.

c) Proinde *arc.* τΧ = *arc.* τΩ.

d) Hoc non demonstrat, sed statuit noster, unde propositionis omnis demonstratio quodammodo vacillat. Certe debuit confirmare iusta demonstratione,

propter perpendiculum a puncto Ω ad planum circuli ΑΒΓ demissum maius est perpendiculo a puncto Φ ad planum circuli ΑΒΓ demisso. Pariter autem perpendicularis quoque a puncto Χ maior est perpendiculari a puncto Φ, utraque enim earum aequalis est demissae a puncto Ι. Inde sublimius est punctum Ω, quam Φ, et est punctum quidem Ω polus circuli ΜΝΞ, punctum Φ autem circuli ΒΖΓ, quare polus circuli ΜΝΞ sublimior est polo circuli ΒΖΓ. At quorum circulorum poli sublimiores sunt, magis inclinati sunt (21), inde *circ.* ΜΝΞ ad *circ.* ΑΒΓ magis inclinatus est, quam *circ.* ΒΖΓ, quare *circ.* ΒΖΓ rectior est circulo ΜΝΞ. Similiter iam ostendemus, omnibus quoque circulum ΕΖΗΘ contingentibus circulis circulum ΒΖΓ rectiorem esse; rectissimus ergo est *circ.* ΒΖΓ.

Dico praeterea, circulum ΥΘ esse humillimum.

Namque quia perpendiculum a puncto τ demissum ad planum circuli ΑΒΓ maius est quam perpendiculum a puncto Ψ ad planum circuli ΑΒΓ demissum (*a*), sublimius est τ quam Ψ. Et punctum quidem τ polus est circuli ΥΘ, punctum Ψ autem polus circuli ΣΤ, inde polus circuli ΥΘ sublimior est quam polus circuli ΣΤ. Quorum tamen circulorum poli sublimiores sunt, ii magis inclinantur; ergo *circ.* ΥΘ ad circulum ΑΒΓ magis inclinatur, quam *circ.* ΣΤ, et proinde humilior est *circ.* ΥΘ quam *circ.* ΣΤ. Similiter iam ostendemus, omnibus quoque circulum ΕΖΗΘ contingentibus circulis circulum ΥΘ esse humiliorem; igitur ΥΘ humillimus est.

Et quoniam perpendicularis a puncto Ω ducta aequalis est ductae perpendiculari a puncto Χ ad planum circuli ΑΒΓ, aequaliter distant puncta Ω, Χ ab hoc plano. Atque punctum quidem Ω polus est circuli ΜΝΞ, punctum Χ autem polus circuli ΟΠΡ; hinc poli circulorum ΜΝΞ, ΟΠΡ aequaliter distant a plano circuli ΑΒΓ. Sed quorum circulorum poli aequaliter distant ab eodem plano, ii similiter inclinati sunt, igitur circuli ΜΝΞ, ΟΠΡ ad circulum ΑΒΓ similiter sunt inclinati.

---

arcum ΧΙΩ tenere eam positionem, quam forma exscripta exhibet, hoc est, arcum ΚΙ minorem esse arcu ΚΦ. Aliam prorsus demonstrandi viam ingressus Arabs feliciter praetervectus est hunc scopulum. Vid. addit. ad h. prop.

a) Vid. not. praeced.

Rursum quia perpendiculum a puncto Ψ ductum ad planum circuli ΑΒΓ perpendiculo a X ad planum circuli ΑΒΓ maius est (*a*), sublimius est punctum X quam Ψ. Et est punctum quidem Ψ polus circuli ΣΤ, punctum vero X polus circuli ΟΠΡ, polus igitur circuli ΣΤ polo circuli ΟΠΡ sublimior est. Sed quorum circulorum poli sublimiores sunt, ii magis inclinantur; inde *circ.* ΣΤ ad *circ.* ΑΒΓ magis inclinatur, quam *circ.* ΟΠΡ.

Proinde circuli ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ ad circulum ΑΒΓ sunt inclinati, et rectissimus quidem eorum est *circ.* ΒΖΓ, humillimus vero *circ.* ΥΘ, circuli autem ΜΝΞ, ΟΠΡ similiter sunt inclinati, et *circ.* ΣΤ ad *circ.* ΑΒΓ magis inclinatus est, quam *circ.* ΟΠΡ; denique poli eorum in uno siti sunt circulo et parallelo et minore quam *circ.* ΑΔ.

Propositio 23. Theor.

Positis eisdem si arcus a nodis ad contactus pertinentes aequales sint, similiter inclinati erunt praedicti circuli maximi.

F. 46. Sint igitur arcus ΝΜ, ΠΡ a nodis, id est, a punctis Μ, Ρ ad Π, Ν pertinentes aequales; dico, circulos ΜΝΞ, ΟΠΡ ad *circ.* ΑΒΓ similiter inclinatos esse. Sumatur enim polus circulorum parallelorum ΑΔ, ΕΖΗΘ, sitque punctum Λ, et per puncta Α, Λ describatur circulus maximus ΘΑΛΖΥ; iam est manifestum, fore ut etiam transeat per punctum Κ, polum puta circuli ΑΒΓ (5); et describantur circuli maximi ΛΝΒ, ΛΠΓ per punctum Λ et per alterutrum punctorum Ν, Π.

Et quoniam in sphaera contingunt sese circuli duo ΕΖΗΘ, ΜΝΞ, per polos autem unius, perque contactum descriptus est circulus maximus ΛΝΒ, pervadet circulus ΛΝΒ et per polos circuli ΜΝΞ eritque ei ad angulos rectos (I, 15). Similiter iam ostendemus, circulum ΛΠΓ quoque esse per polos circuli ΟΠΡ, eique ad angulos rectos. Et quoniam in aequalium circulorum ΜΝΞ, ΟΠΡ diametris a punctis Ν, Π incipientibus, ad perpendiculum insistunt segmenta circulorum aequalia ΝΛ, ΠΛ cum iis, quae superexcurrunt, atque ablati sunt aequales eorum arcus ΝΛ, ΠΛ, dimidiis arcubus integrorum

a) Vid. d. pag. 130.

minores, circulorum autem primo positorum ablati sunt arcus aequales ΜΝ, ΠΡ; consequitur, rectam a Λ ad punctum M iunctam aequalem esse rectae a Λ ad P iunctae (12), quocirca polo quidem Λ, intervallo autem ΛΜ descriptus circulus pervadet etiam per punctum P. Transeat, sitque ΜΞΟΡ, circulis ΑΔ, ΕΖΗΘ parallelus est, quippe qui circa polos eosdem sit atque illi. Et quoniam in sphaera duo circuli ΑΒΓ, ΜΞΟΡ secant se mutuo, per polos autem eorum descriptus est circulus maximus ΘΑΛΚΖΥ, bifariam secat *circ.* ΘΑΛΚΖΥ ablata circulorum segmenta (9), quocirca est *arc.* ΜΥ = *arc.* ΥΡ. Rursus quoniam in sphaera duo circuli ΜΝΞ, ΜΞΥΟΡ secant sese, per polos autem eorum descriptus est circulus maximus ΛΝΒ, bifariam secabit ablata circulorum segmenta, quapropter est *arc.* ΜΝ = *arc.* ΝΞ, et *arc.* ΜΣ = *arc.* ΣΞ. Similiter iam ostendemus, esse quoque *arc.* ΟΠ = *arc.* ΠΡ, et *arc.* ΟΤ = *arc.* ΤΡ. Quoniam igitur *arc.* ΜΝ = *arc.* ΠΡ, et 2 *arc.* ΜΝ = *arc.* ΜΝΞ, sed 2 *arc.* ΠΡ = *arc.* ΟΠΡ, consequens est *arc.* ΜΝΞ = *arc.* ΟΠΡ; suntque circuli aequales, inde recta arcum ΜΝΞ subtendens aequalis est rectae arcum ΟΠΡ subtendenti. Verum recta *arc.* ΜΝΞ subtendens subtendit etiam *arc.* ΜΣΞ, recta autem *arc.* ΟΠΡ subtendens subtendit etiam *arc.* ΟΤΡ, ergo recta *arc.* ΜΣΞ subtendens aequalis est rectae *arc.* ΟΤΡ subtendenti; suntque circuli eiusdem, quare *arc.* ΜΣΞ = *arc.* ΟΤΡ est. Atque est ½ *arc.* ΜΣΞ = *arc.* ΜΣ, sed ½ *arc.* ΟΤΡ = *arc.* ΡΤ, ideo et *arc.* ΜΣ = *arc.* ΡΤ; verum etiam totus *arc.* ΜΣΞΥ = *arc.* ΥΟΤΡ toti, quare excessus *arc.* ΣΞΥ = *arc.* ΥΟΤ est; suntque eiusdem circuli, igitur *arc.* ΥΞΣ ∾ *arc.* ΥΟΤ est. Sed est quidem *arc.* ΣΞΥ ∾ *arc.* ΝΖ, verum *arc.* ΥΟΤ ∾ *arc.* ΖΠ, inde *arc.* ΝΖ ∾ *arc.* ΖΠ, suntque eiusdem circuli, quare *arc.* ΝΖ = *arc.* ΖΠ. Proinde circuli ΜΝΞ, ΟΠΡ aequaliter distant ab alterutro punctorum, in quibus segmenta bifariam secantur, ergo inclinati sunt similiter (22). Itaque circuli ΜΝΞ, ΟΠΡ ad circulum ΑΒΓ similiter inclinati sunt.

Theodosii Sphaericorum

Liber tertius.

Propositio 1. Theor.

Si recta quaedam per circulum ducatur, secans ipsum in partes inaequales, et circuli segmento non maiore quam semicirculo ad perpendiculum super ea constituto ipsius segmenti insistentis arcus dividatur in partes inaequales; minori quidem arcui subtensa chorda minima est omnium ab eodem puncto ad maiorem arcum primo positi circuli pertinentium rectarum, eique propior semper est minor remotiore ex iis, quae ab eodem puncto ductae sunt inter minimam illam et diametrum eam, in quam perpendicularis cadit a puncto illo demissa; maxima vero est omnium, quae ab eodem puncto ducitur ad eiusdem diametri terminum. Praeterea arcui maiori segmenti insistentis subtensa minima est omnium inter illam et diametrum (ad maiorem arcum circuli primo positi) pertinentium rectarum, semperque propior illi minor est remotiore. Sed si perducta illa circuli dimetiens sit, ceteris suo statu manentibus; minor quidem erit proposita illa recta omnium ab eodem puncto ad ambitum circuli primo positi pertinentium, maxima tamen erit chorda arcus maioris.

F. 47. Ducatur enim per circulum ΑΒΓΔ recta quaedam ΒΔ, circulum secans in partes inaequales, sitque *arc.* ΒΓΔ $>$ *arc.* ΒΑΔ. Et super ΒΔ ad perpendiculum constituatur segmentum ΒΕΔ semicirculo non maius, atque dividatur *arc.* ΒΕΔ in puncto Ε in segmenta inaequalia, sitque *arc.* ΒΕ $<$ *arc.* ΕΔ, et iungatur

EB; dico, rectam BE minorem esse omnium a puncto E ad arcum BEΔ pertinentium rectarum.

Namque demittatur perpendicularis EZ a puncto E ad planum circuli ABΓ, iam cadet in rectam BΔ, intersectionem planorum ABΓΔ, BEΔ, quia segmentum BEΔ ad perpendiculum est circulo ABΓΔ. Ac sumatur centrum circuli ABΓΔ, sitque punctum H, et iuncta ZH producatur ad partes Θ, K, a puncto E autem producatur EΛ ad *arc.* BΓΔ, et iungatur ZΛ.

Iam quia EZ perpendicularis est ad planum circuli ABΓ, cum omnibus quoque rectis ei occurrentibus et in plano circuli ABΓΔ positis rectos angulos constituet. Atqui utraque ZB, ZΛ occurrit EZ rectae, suntque in plano circuli ABΓ, ergo utervis angulorum BZE, ΛZE rectus est. Et quoniam est $BZ < Z\Lambda$ (*E.* III, 7.), sequitur etiam, esse $ZB^2 < Z\Lambda^2$. Addatur commune EZ^2, inde est

$$EZ^2 + ZB^2 < EZ^2 + Z\Lambda^2;$$

verum est $EZ^2 + ZB^2 = BE^2$

et $EZ^2 + Z\Lambda^2 = \Lambda E^2$

ergo $BE^2 < \Lambda E^2$, unde $BE < \Lambda E$.

Similiter iam ostendemus, BE minorem quoque esse omnium rectarum a puncto E ad arcum BΓΔ pertinentium; ideo BE minor est omnium rectarum a puncto E ad arcum BΓΔ pertinentium.

Dico praeterea, rectarum a puncto E inter puncta B, K ductarum propiorem illi semper esse minorem remotiore.

Ducatur enim altera etiam EΓ, et iungatur ZΓ.

Et quoniam est $\Lambda Z < Z\Gamma$, consequitur $Z\Lambda^2 < Z\Gamma^2$. Addatur commune ZE^2, hinc est

$$EZ^2 + Z\Lambda^2 < EZ^2 + Z\Gamma^2;$$

sed est $\Lambda Z^2 + ZE^2 = \Lambda E^2$

et $\Gamma Z^2 + ZE^2 = E\Gamma^2$

proinde $\Lambda E^2 < E\Gamma^2$, ergo $\Lambda E < E\Gamma$.

Similiter iam ostendemus, rectarum a puncto E inter B, K ductarum propiorem rectae EB semper esse minorem remotiore.

Iungantur deinde et rectae EK, EΔ. Dico iterum, omnium a puncto E inter puncta Δ, B ductarum rectarum maximam esse EK.

Quoniam enim $KZ > \Gamma Z$, sequitur, esse etiam $KZ^2 > \Gamma Z^2$. Addatur commune ZE^2, iam prodeunt $KZ^2 + ZE^2$, h. e. EK^2 maiora quam $EZ^2 + Z\Gamma^2$, h. e. quam $E\Gamma^2$, igitur est $KE > E\Gamma$. Similiter iam ostendemus, omnium a puncto E ad *arc.* BΔ pertinentium rectarum maiorem esse EK; ergo EK maxima est omnium a puncto E ad *arc.* BΔ pertinentium rectarum.

Dico deinde, et rectam EΔ minorem esse omnium a puncto E inter puncta K, Δ pertinentium rectarum.

Etenim ducatur altera quoque EM, et iungatur MZ.

Et quia $\Delta Z < ZM$ est, sequitur $\Delta Z^2 < ZM^2$. Addatur commune ZE^2, exin prodeunt $EZ^2 + Z\Delta^2$, i. e. $E\Delta^2$, minora quam $EZ^2 + ZM^2$, i. e. quam EM^2, ergo $\Delta E < EM$. Similiter iam ostendemus, omnium etiam a puncto E ad *arc.* KΔ inter puncta K, Δ pertinentium rectarum minorem EΔ esse; minima igitur est EΔ rectarum omnium a puncto E ad *arc.* KΔ inter puncta K, Δ pertinentium; semperque propior illi remotiore minor est ex iis rectis, quae inter puncta K, Δ ductae sunt.

F. 48. Verum etiam ducta BΔ diameter sit circuli ΑΒΓΔ, reliqua autem suo statu maneant; dico, rectam quidem EB minorem esse omnium a puncto E ad circumductam circuli ΑΒΓΔ pertinentium, sed EΔ maximam esse.

Namque constructis iisdem quoniam est *arc.* $\Delta E >$ *arc.* EB, atque demissa EZ perpendicularis, sequitur etiam $\Delta Z > ZB$. Estque BΔ dimetiens circuli ΑΒΓΔ, centrum itaque circuli est in recta ΔZ, ergo $\Delta Z > Z\Gamma$ et $Z\Gamma > ZB$, unde quoque $\Delta Z^2 > Z\Gamma^2$, et $Z\Gamma^2 > ZB^2$. Addatur commune ZE^2, est consequens, esse $\Delta Z^2 + ZE^2$, h. e. $E\Delta^2$ maius quam $\Gamma Z^2 + ZE^2$, h. e. quam ΓE^2; sed $\Gamma Z^2 + ZE^2$, h. e. ΓE^2 est maius quam $BZ^2 + ZE^2$, h. e. quam BE^2; igitur est $\Delta E > E\Gamma$, et $E\Gamma > EB$. Similiter iam ostendemus, omnium rectarum a puncto E ad ambitum circuli ΑΒΓΔ pertinentium maximam quidem esse ΔE, minorem autem EB.

Proinde maxima est EΔ rectarum omnium a puncto E ad ambitum circuli ΑΒΓΔ pertinentium, EB autem minima.

Propositio 2. Theor.

Si in circulum ducatur recta quaedam segmentum abscindens non minus quam semicirculum, et super ea constituto circuli segmento non maiore quam semicirculo, segmenti insistentis circumducta dividatur in partes inaequales; arcui minori subtensa chorda rectarum omnium ab eodem puncto ad non minorem semicirculi arcum pertinentium minor est.

Ducatur enim in circulum ΑΒΓΔ recta ΑΓ, abscindens F. 49.
segmentum ΑΒΓ non minus semicirculo, et in recta ΑΓ insistat circuli segmentum ΑΕΓ, semicirculo non maius, propensum ad segmentum ΑΔΓ non maius semicirculo, atque dividatur *arc.* ΑΕΓ in puncto Ε in partes inaequales, et sit *arc.* ΑΕ $<$ *arc.* ΕΓ, et iungatur ΕΑ; dico, rectam ΕΑ minorem esse ex omnibus rectis a puncto Ε ad *arc.* ΑΒΓ pertinentibus.

Ducatur enim perpendicularis a puncto Ε ad planum circuli ΑΒΓΔ, cadetque inter rectam ΑΓ et *arc.* ΑΔΓ (*a*), eo quod segmentum ΑΕΓ ad segmentum ΑΔΓ est inclinatum. Cadat, et sit ΕΖ, atque concurrat cum plano circuli in puncto Ζ, centrumque sumatur circuli ΑΒΓ. Sed centrum circuli ΑΒΓ aut in recta ΑΓ est, aut inter rectam ΑΓ et *arc.* ΑΒΓ, propterea quod ponitur, segmentum ΑΒΓ semicirculo non minus esse. Sit igitur primo inter rectam ΑΓ et *arc.* ΑΒΓ, atque sit punctum Η, et iuncta ΖΗ producatur ad partes Δ, Β, a puncto Ε autem ad *arc.* ΑΒΓ producatur recta ΕΘ, iunganturque ΑΖ, ΖΘ.

Et quoniam ΕΖ ad perpendiculum est plano circuli ΑΒΓΔ, cum omnibus etiam rectis ei occurrentibus et positis in plano circuli ΑΒΓΔ, constituet angulos rectos. Sed rectae ΕΖ occurrit utraque ΑΖ, ΖΘ, in plano circuli ΑΒΓΔ posita, inde angulorum ΑΖΕ, ΘΖΕ uterque rectus est. Et quoniam est $\mathrm{AZ} < \mathrm{Z\Theta}$, sequitur et $\mathrm{AZ}^2 < \Theta\mathrm{Z}^2$. Addatur commune ZE^2, ergo sunt $\mathrm{AZ}^2 + \mathrm{ZE}^2$, i. e. AE^2 minora quam $\Theta\mathrm{Z}^2 + \mathrm{ZE}^2$,

---

a) Arabs ille Voegelini addit: „*quoniam de circulis in sphaera loquimur.*" Theodosius certe de hemisphaerio cogitandi legem tacite imponit, sive potius de segmento sphaerico hemisphaerio non maiore; alioquin aut in ipsum ambitum aut praeter circuli aream cadere potest demissa perpendicularis ΕΖ.

h. e. quam ΘE^2, quare $AE < E\Theta$ est. Similiter iam ostendemus, omnium quoque a puncto E ad *arc.* ABΓ pertinentium rectarum minorem esse AE, hinc omnium rectarum, a puncto E ad *arc.* ABΓ pertinentium minor est AE. Iterumque ostendemus similiter, propiorem illi semper esse minorem remotiore ex iis rectis, quae a puncto E ducantur ad arcum a puncto A ad B pertinentem, h. e. inter puncta A, B.

Iam iungatur EB; dico, EB maximam esse omnium a puncto E ad *arc.* ABΓ pertinentium rectarum.

Quoniam enim $BZ > Z\Theta$, sequitur $BZ^2 > Z\Theta^2$. Addatur commune ZE^2, igitur $BZ^2 + ZE^2$, h. e. EB^2 maius est quam $\Theta Z^2 + ZE^2$, h. e. quam $E\Theta^2$, ergo est $BE > E\Theta$. Similiter iam ostendemus, omnium quoque a puncto E ad *arc.* ABΓ pertinentium rectarum rectam EB maiorem esse; hinc EB maxima est omnium a puncto E ad *arc.* ABΓ pertinentium rectarum.

Iungatur deinde et EΓ; dico etiam, rectam quoque EΓ minorem esse omnium a puncto E ad *arc.* BΓ inter puncta B, Γ pertinentium rectarum.

Ducatur enim inter puncta B, Γ altera etiam EK, et iungantur ZΓ, ZK.

Et quia $\Gamma Z < ZK$, sequitur etiam $\Gamma Z^2 < ZK^2$. Addatur commune ZE^2, ergo $\Gamma Z^2 + ZE^2$, h. e. $E\Gamma^2$, minus est quam $KZ^2 + ZE^2$, i. e. quam EK^2, unde $\Gamma E < EK$ est. | Similiter iam ostendemus, omnium quoque a puncto E ad *arc.* BKΓ inter puncta B, Γ pertinentium rectarum rectam EΓ minorem esse. Iterumque ostendemus similiter, propiorem ei semper esse minorem remotiore ex iis rectis, quae a puncto E ad *arc.* BΓ inter puncta B, Γ pertinent.

Similiter etiam ostendetur, si ABΓ semicirculus sit, rectam AE minorem esse ex omnibus a puncto E ad *arc.* ABΓ pertinentibus rectis.

Propositio 3. Theor.

Si in sphaera duo circuli maximi secent sese mutuo, ab alterutro autem eorum auferantur continentes arcus aequales ad utramque partem eius puncti, in quo secant sese; aequales erunt rectae arcuum terminos ad easdem partes positos iungentes.

Etenim in sphaera duo circuli maximi AB, ΓΔ secent se invicem in puncto E, ab alterutro autem eorum auferantur arcus aequales continentes ad utramque partem puncti E, puta *arc.* EA = *arc.* EB et *arc.* EΓ = *arc.* EΔ, et iungantur rectae ΓA, BΔ; dico, esse ΓA = BΔ. F. 50.

Nam polo quidem E, intervallo autem EA descriptus circulus transibit et per punctum B; hinc aut per punctum Γ pervadet aut non. Pervadat primum per Γ, ergo transibit etiam per punctum Δ, est enim *arc.* ΓE = *arc.* EΔ. Transeat et sit circulus AΓBΔ, atque circulorum quidem AΓBΔ, AEB intersectio communis sit recta AB, circulorum vero AΓBΔ, ΓEΔ intersectio sit ΓΔ.

Et quoniam in sphaera circulus maximus AEB circulum sphaerae aliquem AΓBΔ secat per polos, et bifariam secabit et ad angulos rectos (I, 15), quare AB diameter est circuli ABΓΔ. Similiter iam ostendemus, rectam quoque ΓΔ diametrum esse circuli ABΓΔ, ergo quattuor rectae AZ, ZΓ, ZB, ZΔ sunt aequales. Quoniam igitur duae AZ, ZΓ aequales sunt duabus ΔZ, ZB, altera alteri, et angulus AZΓ aequalis est angulo ΔZB, ergo basis AΓ aequalis basi ΔB est.

Sed iam polo quidem E, intervallo autem EA descriptus circulus non transeat per Γ, sed cadat ultra illud, pervadet quidem per punctum B, sed ultra punctum Δ cadet. Pervadat, sitque ut circulus AHBΘ, et compleatur circulus ΓEΔ ad puncta H, Θ, atque circulorum AHBΘ, AEB communis intersectio sit AB, circulorum vero AHBΘ, HEΘ communis intersectio sit HΘ. F. 51.

Iam iterum ostendemus similiter, punctum Z centrum esse circuli AHBΘ, et alterutrum circulorum AEB, HEΘ ad perpendiculum esse circulo AHBΘ. Itaque ducantur perpendiculares ΓK, ΔΛ a punctis Γ, Δ ad planum circuli AHBΘ, iunganturque rectae AK, ΛB.

Et quia est *arc.* EH = *arc.* EΘ, nam punctum E polus est circuli AHBΘ, estque *arc.* ΓE = *arc.* EΔ, ergo excessus *arc.* ΓH = *arc.* ΔΘ excessui est. Quoniam igitur circuli segmentum HEΘ positum est ad perpendiculum, atque ablati sunt arcus aequales HΓ, ΔΘ, et demissae ΓK, ΔΛ perpendiculares ad planum circuli AHBΘ, consequens est, esse ΓK

$= \Delta\Lambda$, et $HK = \Theta\Lambda$ (*a*); est autem praeterea $HZ = Z\Theta$, quare $KZ = \Lambda Z$. Sed est etiam $\Lambda Z = BZ$, ergo ΛK, ΛB aequales sunt. Quoniam igitur est $AK = \Lambda B$, et $\Gamma K = \Delta\Lambda$, duae iam AK, $K\Gamma$ duabus $B\Lambda$, $\Lambda\Delta$ aequales sunt, altera alteri, et angulus ΓKA aequalis est angulo $\Delta\Lambda B$, nam rectus est uterque, ergo basis etiam $A\Gamma$ basi ΔB aequalis est.

Propositio 4. Theor.

Si sphaerae alicuius duo circuli maximi secent sese invicem, ab uno autem eorum auferantur arcus aequales continentes ad utramque partem eius puncti, in quo secant sese, atque per terminos eorum producantur plana parallela, quorum quidem unum sectioni communi circulorum concurrit extra superficiem sphaerae, puta ad partes puncti dicti, et si arcuum aequalium unus maior sit altero utro (alterius circuli) arcuum, qui a ductis planis auferuntur usque ad punctum illud: arcus inter punctum et planum non concurrens maior est quam arcus eiusdem circuli inter punctum et planum concurrens.

F. 52. Namque duo sphaerae circuli maximi AEB, $\Gamma E\Delta$, secent sese in puncto E; ab uno eorum AEB aequales auferantur arcus AE, EB continentes ad utramque partem puncti E, et per puncta A, B agantur plana parallela $A\Delta$, ΓB, quorum $A\Delta$ concurrat cum intersectione communi circulorum AEB, $\Gamma E\Delta$ extra superficiem sphaerae ad partes puncti E, unus vero arcuum aequalium AE, EB maior sit quam alteruter arcuum ΓE, $E\Delta$; dico, esse *arc.* $\Gamma E >$ *arc.* $E\Delta$.

Etenim polo quidem E, intervallo autem EA descriptus circulus pervadet per punctum B, sed cadet ultra puncta Γ, Δ, propterea quod alteruter arcuum AE, EB maior est quam alteruter arcuum ΓE, $E\Delta$. Vadat, et sit uti circulus $AHBZ$, atque compleantur circuli. Et circulus quidem $A\Delta$ concurrat cum circulo $AHBZ$ in puncto Θ, circulus $B\Gamma$ autem in puncto K, ac circulorum $AHBZ$, AEB communis intersectio sit AB, cir-

a) Etenim cogitatione finge tibi chordas ΓH, $\Delta\Theta$, prodit $\Gamma H = \Delta\Theta$ propter arcus aequales, et est $\Gamma KH = \Delta\Lambda\Theta$ ut rectus, atque $\Gamma HK = \Delta\Theta\Lambda$, quia *arc.* $\Gamma\Theta =$ *arc.* ΔH, unde *triang.* $\Gamma KH \cong$ *triang.* $\Delta\Lambda\Theta$.

culorum vero ΑΗΒΖ, ΗΕΖ intersectio sit ΗΖ, circulorum ΑΔΘ, ΑΗΒΖ intersectio sit ΑΘ, circulorum ΚΓΒ, ΑΗΒΖ intersectio sit ΚΒ, circulorum ΗΕΖ, ΑΔΘ intersectio sit ΔΜ, circulorum autem ΚΓΒ, ΗΕΖ intersectio sit ΓΝ. Et quia planum ΑΔ cum intersectione communi planorum ΗΕΖ, ΑΕΒ, i. e. cum recta ΕΑ, extra superficiem sphaerae ad partes puncti Ε concurrit, concurrat in puncto Ξ, et producatur ΕΛ ad punctum Ξ. Ergo punctum Ξ est in plano ΑΔΘ, sed etiam in plano ΗΕΖ; verum etiam puncta Δ, Μ sunt in utrisque planis ΑΔΘ, ΗΕΖ, proinde recta ΜΔ cum illo concurrit extra superficiem sphaerae ad partes puncti Ε, concurret ergo in puncto Ξ.

Et quoniam sphaerae circulus maximus ΑΕΒ aliquem sphaerae circulum ΑΗΒΖ secat per polos, et bifariam secabit et ad angulos rectos (I. 15), quare ΑΒ dimetiens est circuli ΑΗΒΖ. Similiter iam ostendemus, rectam quoque ΗΖ diametrum esse circuli ΑΗΒΖ, centrum igitur eius est Λ. Et quia duo plana parallela ΚΓΒ, ΑΔΘ secantur a plano quodam ΑΗΒΖ, intersectiones eorum communes parallelae sunt (*E.* XI, 16), quare ΚΒ ‡ ΑΘ est. Rursus quia plana duo parallela ΚΓΒ, ΑΔΘ secantur a plano quodam ΗΕΖ, intersectiones eorum communes parallelae sunt, ideo ΓΝ ‡ ΔΜ est. Et quoniam planorum ΑΕΒ, ΗΕΖ utrumque ad perpendiculum est plano ΑΗΒΖ, consequitur et intersectionem eorum communem plano ΑΗΒΖ esse ad perpendiculum. Sed communis eorum intersectio est ΕΛ, quare perpèndicularis est ΕΛ ad planum ΑΗΒΖ, constituet igitur angulos rectos cum omnibus ei occurrentibus rectis in plano circuli ΑΗΒΖ positis. Concurrit autem rectae ΕΛ rectarum ΑΒ, ΗΖ utraque, in plano circuli ΑΗΒΖ posita, ergo ΕΛ perpendicularis est ad utramque ΑΒ, ΗΖ. Et quoniam trianguli ΞΛΜ exterior angulus est ΞΛΝ, maior est quam interior et oppositus ΞΜΛ; sed rectus est angulus ΞΛΝ; ergo ΞΜΛ acutus et ΞΜΖ obtusus est. Atque quia ΓΝ ‡ ΔΜ est, inciditque in eas recta ΗΖ, sequitur esse ΓΝΗ = ΞΜΛ (*E.* I, 29); sed acutus est angulus ΞΜΛ, ergo acutus etiam ΓΝΗ. Et quoniam ΑΜ ‡ ΝΒ, atque productae sunt duae ΑΒ, ΜΝ, et ΑΛ = ΛΒ est; sequitur etiam ΝΛ = ΛΜ; sed est ΗΛ = ΛΖ, ergo excessus ΗΝ = ΜΖ excessui. Quoniam itaque circuli est segmentum ΗΕΖ, ablataeque sunt aequales rectae

HN, MZ, et ductae parallelae ΓN, ΔM, angulusque ΓNH acutus est, ΔMZ vero obtusus, sequitur, fore ut sit *arc.* HΓ < *arc.* ΔZ(*a*).

Igitur quia

arc. HE = *arc.* ZE,

et *arc.* HΓ < *arc.* ΔZ

prodit excessus *arc.* ΓE > *arc.* EΔ excessui.

Propositio 5. Theor.

Si polus parallelorum sit in circumducta circuli maximi, eumque ad angulos rectos secent duo circuli maximi, quorum quidem alter est unus ex parallelis, alter autem obliquus ad parallelos; ac si circuli obliqui sumantur arcus aequales continentes ad easdem partes maximi parallelorum (b), et describantur circuli paralleli per puncta terminantia: circuli maximi primo positi arcus inter illos intercepti erunt inaequales, et qui maximo parallelorum propior est, semper erit remotiore maior.

F. 53. Etenim polus A circulorum parallelorum sit in circumducta circuli maximi ABΓ, eumque ad angulos rectos secent

a) Voegelino et Clavio praeeuntibus lemma hocce propono:

Si arcui circuli recta subtendatur, ad quam ex arcu duae perpendiculares demittantur, auferentes versus terminos arcus duos arcus aequales: auferent eaedem duas rectas ex recta subtensa aequales. Et si duae perpendiculares ad rectam subtensam ducantur auferentes duas rectas aequales: auferent eaedem duos arcus aequales.

1) Etenim sit *arc.* AB = *arc.* ΓΔ, et rectae BE, ΓZ perpendiculares ad rectam AΔ. Ductis AB, ΓΔ, BΓ, AΓ est AB = ΓΔ et ΓAΔ = AΓB (*E.* III, 27.), quare BΓ ‡ AΔ, unde BE = ΓZ. Sed est AEB = ΓZΔ, ergo *triang.* ABE ≌ *triang.* ΓZΔ (*Camer. ad Eucl.* I, 26., *obs.* 2.), proin AE = ZΔ.

2) Sit e converso AE = ZΔ, omnia vero constructa ut antea. Si non sit *arc.* AB = *arc.* ΓΔ, ponamus *arc.* AB = *arc.* HΔ, et demittamus perpendiculum HΘ ad rectam AΔ. Iam ostendemus ut ante, AE = ΘΔ esse, ergo foret ΘΔ = ZΔ, quod repugnat; igitur est *arc.* AB = *arc.* ΓΔ.

Quodsi demonstrato lemmate ad ipsius propositionis figuram redeamus, cogitatione erigantur perpendicula in plano HEZ, alterum quidem in puncto N, alterum vero in puncto M, quorum illud secabit *arc.* HEZ inter puncta Γ, E, hoc autem inter puncta Δ, Z, quoniam acutus est angulus ΓNH, obtusus autem angulus ΔMZ; ergo est *arc.* HΓ < *arc.* ΔZ.

b) Intelligit sphaerae circulum maximum simpliciter, non comparatione spectatum cum aliis circulis parallelis.

circuli duo maximi ΒΖΓ, ΔΖΕ, quorum quidem *circ.* ΒΖΓ parallelorum unus sit, *circ.* ΔΖΕ autem obliquus ad parallelos. Circuli obliqui ΔΖΕ sumantur arcus aequales ΚΘ, ΘΗ continentes ad easdem partes circuli parallelorum maximi ΒΖΓ; per puncta autem Κ, Θ, Η describantur circuli paralleli ΟΚΠ, ΝΘΞ, ΛΗΜ: dico, fore ut circuli ΟΚΠ, ΝΘΞ, ΛΗΜ intercipiant circuli maximi primo positi ΑΒΓ arcus inaequales, et propiorem quidem circulo ΒΖΓ maiorem remotiore; dico igitur, fore ut sit *arc.* ΟΝ $<$ *arc.* ΝΛ.

Describatur enim per puncta Α, Θ circulus maximus ΑΘΡ. Et quia punctum Α polus est circuli ΟΚΠ, est et *arc.* ΑΝΟ $=$ *arc.* ΑΘΡ. Rursus quia punctum Α polus est circuli ΝΘΞ, est etiam *arc.* ΑΛΝ $=$ *arc.* ΑΣΘ, quare et *arc.* ΝΟ $=$ *arc.* ΘΡ. Similiter iam ostendemus, esse quoque *arc.* ΛΝ $=$ *arc.* ΣΘ, unde recta ΝΟ $=$ ΘΡ et ΛΝ $=$ ΣΘ. Iam quoniam in sphaera circulus maximus ΑΘΡ sphaerae aliquem circulum ΟΚΠ per polos secat, et bifariam secabit et ad rectos angulos, quare *circ.* ΑΘΡ ad perpendiculum est *circ.* ΟΚΠ. Sed in circuli cuiusdam ΟΚΠ diametro, incipiente in puncto Ρ, circuli segmentum ΡΘ, cum eo quod superexcurrit, insistit ad angulos rectos, et ablatus est *arc.* ΡΘ, dimidia parte segmenti insistentis minor; recta igitur a puncto Θ ad Ρ iuncta minor est ex omnibus rectis, a puncto Θ ad *arc.* ΟΚΠ pertinentibus (1), quare recta iungens puncta Θ et Ρ minor est recta iungente puncta Θ et Κ; et sunt aequales circuli, quia maximi sunt; proin est *arc.* ΘΡ $<$ *arc.* ΘΚ. Similiter iam ostendemus, esse quoque *arc.* ΘΣ $<$ *arc.* ΘΗ, similiter argumentantes: nam in circuli cuiusdam ΛΗΜ diametro, incipiente in puncto Σ, circuli segmentum ΣΘ cum eo quod superexcurrit ad angulos rectos insistit, et *arc.* ΣΘ, dimidia parte segmenti insistentis minor, est ablatus; hinc ΘΣ $<$ ΘΗ; et est ΚΘ $=$ ΘΗ, ergo rectarum ΚΘ, ΘΗ alterutra maior est quam alterutra rectarum ΡΘ, ΘΣ (*a*). Et quoniam est *circ.* ΟΡΚΠ ‡ *circ.* ΛΗΜ, concurritque *circ.* ΟΡΚΠ cum intersectione communi circulorum ΗΘΚ, ΑΘΡ intra, h. e. ad partes centri sphaerae; concurret ergo *circ.* ΛΗΜ cum circulorum ΗΘΚ, ΑΘΡ intersectione

a) Idcirco *arc.* ΚΘ $>$ *arc.* ΡΘ et *arc.* ΘΗ $>$ *arc.* ΘΣ.

communi extra superficiem sphaerae, videlicet ad partes puncti Θ (*a*). Quoniam ergo sphaerae duo circuli maximi ΗΘΚ, ΣΘΡ secant sese, quorum unius ΗΘΚ ablati sunt arcus aequales ΚΘ, ΘΗ continentes ad partes utrasque puncti Θ, ac producta sunt plana parallela ΛΗΜ, ΟΚΠ, quorum quidem ΛΗΜ concurrit cum intersectione communi planorum ΗΘΚ, ΣΘΡ extra superficiem sphaerae, puta ad partes puncti Θ, aequaliumque arcuum ΚΘ, ΘΗ unus maior est quam alteruter arcuum ΡΘ, ΘΣ; consequitur esse *arc.* ΡΘ > *arc.* ΘΣ (4). Verum etiam est *arc.* ΡΘ = *arc.* ΟΝ et *arc.* ΘΣ = *arc.* ΝΛ (II, 10), igitur est *arc.* ΟΝ > *arc.* ΝΛ.

Propositio 6. Theor.

Si polus parallelorum sit in circuitu circuli maximi, quem ad rectos angulos secant circuli duo maximi, quorum alter est unus ex parallelis, alter vero obliquus ad parallelos, et auferantur circuli obliqui arcus aequales continentes ad easdem partes maximi parallelorum (b), atque describantur circuli maximi per puncta terminantia perque polum; inaequales erunt circuli maximi parallelorum arcus inter hos intercepti, semperque propior circulo maximo primum posito maior erit remotiore.

F. 54. Namque polus Α circulorum parallelorum sit in ambitu circuli maximi ΑΒΓ, secentque circulum ΑΒΓ ad angulos rectos circuli duo maximi ΒΖΓ, ΔΖΕ, quorum alter quidem ΒΖΓ unus ex parallelis sit, alter vero ΔΖΕ obliquus ad parallelos; circuli autem obliqui ΔΖΕ sumantur arcus aequales ΚΘ, ΘΗ continentes ad easdem partes circuli maximi parallelorum ΒΖΓ, atque per Α et per quodlibet punctorum Κ, Θ, Η describantur circuli maximi ΑΗΛ, ΑΘΜ, ΑΚΝ; dico, esse *arc.* ΛΜ > *arc.* ΜΝ.

---

a) Mente concipias totam sphaeram divisam circulo maximo ΑΒΕΓ in duo hemisphaeria, in quorum superficie altera positum est punctum Θ inter plana parallela ΟΚΠ, ΛΗΜ. Sed intersectio circulorum ΗΘΚ, ΛΘΡ transit per punctum Θ, concurritque cum plano ΟΚΠ intra sphaeram, priusquam porrecta est in centrum sphaerae; quare concurrit cum altero plano ΛΗΜ extra sphaeram ad partes eius hemisphaerii, in quo positum est punctum Θ.

b) Respice notulam *b* propos. praeced. pag. 142.

Describantur enim per puncta K, Θ, H circuli paralleli ΞΗΟ, ΠΘΡ, ΣΚΤ, igitur est *arc.* ΣΠ $>$ *arc.* ΠΞ per theorema praecedens. Sed est *arc.* ΣΠ $=$ *arc.* ΥΘ, et *arc.* ΠΞ $=$ *arc.* ΘΦ (II, 10), quare *arc.* ΥΘ $>$ *arc.* ΘΦ. Itaque ponatur *arc.* ΘΧ $=$ *arc.* ΘΦ, verum etiam est *arc.* ΗΘ $=$ *arc.* ΘΚ, proinde recta coniungens puncta H et Φ aequalis est rectae puncta X et K iungenti (3). Describatur per punctum X circulus ΧΨΩ parallelus primo positis.

Et quoniam circulus maximus ΑΨΚΝ sphaerae circulum aliquem ΧΨΩ secat per polos, secabit et bifariam et ad angulos rectos (I, 15.), quapropter circulus ΑΨΚΝ circulo ΧΨΩ ad perpendiculum est, itaque et circulus ΧΨΩ circulo ΑΨΚΝ ad perpendiculum est. Et quia plana duo parallela ΒΖΓ, ΧΨΩ secantur a plano quodam ΑΨΚΝ, parallelae sunt intersectiones eorum (*E.* XI, 16.); hinc planorum ΑΨΚΝ, ΒΖΓ intersectio incipiens in puncto N, circuli ΑΨΚΜ diameter, intersectioni planorum ΑΨΚΝ, ΧΨΩ parallela est; [intersectio itaque planorum ΑΨΚΝ, ΧΨΩ parallela est diametro circuli ΑΨΚΝ]. Iam quia per circulum ΑΨΚΝ producta est recta, circulorum ΑΨΚΝ, ΧΨΩ intersectio, circulum ΑΨΚΝ secans per inaequalia, quippe quae parallela sit diametro circuli ΑΨΚΝ, atque quia insistit ei circuli segmentum ΧΨ cum eo quod superexcurrit, ad angulos rectos, divisusque est arcus segmenti insistentis per inaequalia in puncto X (*a*); iuncta ergo a puncto X ad Ψ recta omnium a puncto X ad arcum ΨΚΝ pertinentium rectarum minor est (1). Igitur est ΧΨ $<$ ΧΚ, sive ΧΚ $>$ ΧΨ, sed est ΧΚ $=$ ΗΦ, unde ΗΦ $>$ ΧΨ. Et quoniam *circ.* ΧΨΩ centro propior est quam *circ.* ΞΗΟ, sequitur esse *circ.* ΧΨΩ $>$ *circ.* ΞΗΟ (I, 6. A.). Quoniam igitur duo circuli ΧΨΩ, ΞΗΟ inaequales sunt, estque minor circulus ΞΗΟ, ac ductae sunt in eis rectae, in circulo quidem ΞΗΟ recta ΗΦ, in circulo ΧΨΩ autem recta

---

a) Circuli maximi ΒΖΓ, ΔΖΕ circulo ΑΒΕΓ insistunt ad angulos rectos, quare punctum Z polus est circuli ΑΒΕΓ (I, 13), *arc.* ΖΒ autem circuli quadrans, eoque *arc.* ΜΝ minor quam quadrans. Sed est *arc.* ΜΝ $\backsim$ *arc.* ΧΨ (II, 10), ergo *arc.* ΧΨ minor est quam circuli quadrans. Totus autem *arc.* ΨΧ ita continuatus, ut circulum maximum ΑΨΝ altera vice secet, semicirculus est, eo quod *circ.* ΑΨΜ *circ.* ΨΧ insistit ad angulos rectos; igitur arcus segmenti illius insistentis divisus est in partes inaequales in puncto X.

$X\Psi$, atque est $H\Phi > X\Psi$; consequitur, *arc.* $H\Phi$ maiorem esse quam similem arcui $X\Psi$ (*a*). Verum est *arc.* $H\Phi \backsim$ *arc.* AM, et *arc.* $X\Psi \backsim$ *arc.* MN (II, 10.), unde *arc.* MΛ maior est quam similis arcui MN; suntque circuli eiusdem, ergo est *arc.* AM $>$ *arc.* MN.

Propositio 7. Theor.

Si sphaerae circulus maximus contingat aliquem sphaerae circulum, alius autem circulus maximus, obliquus ad parallelos circulos (b), contingat circulos maiores quam, quos primo positus contigerat; ac si puncta contactus sint in circulo primum posito, et sumantur circuli obliqui arcus aequales deinceps positi ad easdem partes circuli maximi parallelorum (c), describantur autem circuli paralleli per puncta terminantia: circuli primum positi arcus inter illos intercepti erunt inaequales, et qui propior circulo maximo parallelorum est, semper erit remotiore maior.

F. 55. Etenim sphaerae circulus maximus ΑΒΓ contingat aliquem sphaerae circulum ΑΔ in puncto Α, alius autem circulus maximus ΕΖΗ, obliquus ad circulos parallelos, contingat maiores quam quos *circ.* ΑΒΓ contingit; puncta deinde contactus sint Ε, Η in circulo ΑΒΓ, maximus autem parallelorum sit *circ.* ΒΖΓ; atque circuli obliqui ΕΖΗ sumantur arcus aequales ΑΚ, ΚΘ continentes ad partes easdem circuli parallelorum

---

a) Hoc autem evidens est ex lemmate, quod Voegelino et Clavio ducibus ita propono:

Inaequales chordae ex circulis inaequalibus auferunt arcus inaequales; ita quidem, ut maior chorda ex minore circulo arcuum auferat maiorem quam similem ei, quem minor chorda aufert ex circulo maiore.

F. 54. a. Sint enim duo circuli inaequales ΑΒΖ, ΔΕΗ circa idem centrum descripti, et sit ΑΒ chorda quaedam maioris, ducanturque radii ΑΓ, ΒΓ et chorda ΔΕ circuli minoris; iam constat, esse *chord.* ΑΒ $>$ *chord.* ΔΕ. Quodsi alicubi sit in circulo ΔΕΗ chorda quaedam maior quam ΑΒ, aequalem ei ducere licet et parallelam chordae ΔΕ (*E* III, 14.), neque cadet inter chordas ΔΕ, ΑΒ, sed ad partes centri communis (*E.* III, 15). Cadat, sitque ΘΙ. Igitur est ΘΙ $>$ ΑΒ, quare ΘΙ $>$ ΔΕ, unde *arc.* ΘΔΕΙ $>$ *arc.* ΔΕ. Sed est *arc.* ΔΕ $\backsim$ *arc.* ΑΒ, ergo *arc.* ΘΔΕΙ maior est quam similis arcui ΑΒ.

b) Parallelos intelligit circulo contacto.

c) Vid. pag. 142, not. b.

maximi ΒΖΓ, et per puncta Θ, Κ, Λ describantur circuli paralleli ΜΘΝ, ΞΚΟ, ΠΛΡ; dico, esse *arc.* ΠΞ $>$ *arc.* ΞΜ.

Describatur enim per punctum Κ circulus maximus ΔΚΣ, circulum ΑΔ contingens; ita ut semicirculus in puncto Α incipiens et ad partes puncti Β porrectus non concurrat cum semicirculo in Δ incipiente et porrecto ad partes puncti Σ (II, 13.), ac sumatur polus parallelorum, sitque punctum Υ, et per puncta Υ, Κ describatur circulus maximus ΥΚΦ.

Quoniam igitur sphaerae circulus maximus ΥΚΦ aliquem sphaerae circulum ΠΛΡ secat per polos, secabit et bifariam et ad angulos rectos (I, 15.), quare *circ.* ΥΚΦ perpendicularis est ad *circ.* ΠΛΡ. Iam in circuli cuiusdam ΠΛΡ diametro in puncto Φ incipiente insistit ad perpendiculum circuli segmentum ΦΚΥ cum eo quod superexcurrit, atque segmenti insistentis arcus in partes inaequales dividitur in puncto Κ, et *arc.* ΦΚ minor est quam totius pars dimidia; hinc recta a puncto Κ ad Φ iuncta minima est omnium a puncto Κ ad *arc.* ΠΛΡ pertinentium rectarum, et propior illi remotiore semper est minor (1), igitur est ΚΣ $<$ ΚΛ, suntque aequales circuli ΔΚΣ, ΕΛΗ, sunt enim maximi, ergo est *arc.* ΚΛ $>$ *arc.* ΚΣ. Similiter iam ostendemus, esse quoque *arc.* ΘΚ $>$ *arc.* ΚΨ; atque est *arc.* ΘΚ $=$ *arc.* ΚΛ, ergo unus ex arcubus ΘΚ, ΚΛ maior est quam arcuum ΨΚ, ΚΣ alteruter. Et quia *circ.* ΠΦΣΛΡ ‡ *circ.* ΜΘΝ, circulus autem ΠΦΣΛΡ cum circulorum ΘΚΛ, ΨΚΣ communi intersectione concurrit intra sphaerae superficiem, sequitur, fore ut *circ.* ΜΘΝ concurrat cum circulorum ΘΚΛ, ΨΚΣ intersectione extra superficiem sphaerae ad partes puncti Κ. Quoniam itaque in sphaera maximi circuli ΘΚΛ, ΨΚΣ secant sese in puncto Κ, quorum unius ΘΚΛ ablati sunt arcus aequales ΘΚ, ΚΛ continentes ad utrasque partes puncti intersectionis, productaque sunt per puncta Θ, Λ plana parallela ΠΛΡ, ΜΘΝ, ex quibus planum ΜΘΝ concurrit cum circulorum ΘΚΛ, ΨΚΣ communi intersectione extra superficiem sphaerae ad partes puncti Κ, atque arcuum ΘΚ, ΚΛ unus maior est alterutro arcuum ΣΚ, ΚΨ; igitur est *arc.* ΣΚ $>$ *arc.* ΚΨ (4). Verum est *arc.* ΣΚ $=$ *arc.* ΠΞ et *arc.* ΚΨ $=$ *arc.* ΜΞ; ideo *arc.* ΠΞ $>$ *arc.* ΞΜ.

Propositio 8. Theor.

Si sphaerae circulus maximus contingat circulum aliquem in sphaera, alius autem circulus maximus, obliquus ad parallelos (a), contingat maiores quam quos primo positus contigerat; si porro puncta contactus sint sita in circulo primum posito, atque circuli obliqui arcus aequales sumantur continentes ad partes easdem maximi parallelorum, perque puncta terminantia describantur circuli maximi contingentes eundem, quem et primo positus contigerat, intercipientes inter se circulorum parallelorum arcus similes, ita ut efficiant semicirculos inde a contactibus ad partes punctorum, per quae descripti sunt, non concurrentes cum eo semicirculo circuli primum positi, in quo circuli obliqui is quidem contactus est, qui inter polum apparentem est et maximum parallelorum: inaequales erunt arcus circuli maximi parallelorum intercepti, et propior circulo primum posito semper erit remotiore maior.

F. 56. Etenim sphaerae circulus maximus ΑΒΓ contingat sphaerae aliquem circulum ΑΔ in puncto Α, alius autem circulus maximus ΕΖΓ, obliquus ad parallelos, contingat maiores, quam quos *circ.* ΑΒΓ contingit; puncta porro contactus sita sint in *circ.* ΑΒΓ, in punctis Ε, Γ, et parallelorum maximus sit *circ.* ΒΖ; circuli autem obliqui ΕΖΓ sumantur arcus aequales ΗΘ, ΘΚ continentes ad easdem partes maximi parallelorum ΒΖ, et per puncta Η, Θ, Κ describantur circuli maximi ΔΗΛ, ΜΘΝ, ΞΚΟ, circulum ΑΔ contingentes in punctis Δ, Μ, Ξ, intercipientes inter sese arcus circulorum parallelorum similes, quum semicirculos in punctis Δ, Μ, Ξ incipientes et porrectos ad partes punctorum Η, Θ, Κ, efficiant non concurrentes cum semicirculo ΑΒ (II, 13.); dico, esse *arc.* ΛΝ $>$ *arc.* ΝΟ.

Describantur enim per puncta Η, Θ, Κ circuli paralleli ΠΗΡ, ΣΘ, ΤΥΚ, iam est *arc.* ΣΤ $>$ *arc.* ΣΠ (7); sed est *arc.* ΣΤ $=$ *arc.* ΘΥ, et *arc.* ΣΠ $=$ *arc.* ΘΡ (II, 13.), inde est *arc.* ΥΘ $>$ *arc.* ΘΡ. Igitur ponatur *arc.* ΘΡ $=$ *arc.* ΘΦ, estque *arc.* ΗΘ $=$ *arc.* ΘΚ, quare recta ΗΡ $=$ ΦΚ est (3). Describatur per punctum Φ circulus ΧΦΨ parallelus cuique circulorum ΠΗΡ,

a) Vid. pag. 144, not. b.

ΣΘ, TΥK, BZ, et sumatur polus Ω circulorum parallelorum, ac describatur circulus maximus ΩO per puncta Ω, O.

Et quoniam sphaerae circulus maximus ΩO circulum aliquem BZ in sphaera secat per polos, et bifariam secabit et ad angulos rectos (I, 15.), ideo *circ.* ΩO perpendicularis est ad *circ.* BZ, quare *circ.* ΞKO ad *circ.* BZ inclinatus est versus partes A, E, B, et *circ.* BZ ad *circ.* ΞKO inclinatus est versus partes A, E, B. Sed est *circ.* BZ ‡ *circ.* XΦΨ, ergo inclinatus est *circ.* XΦΨ ad *circ.* ΞKO versus partes Ξ. Et quia duo plana parallela BZ, XΦΨ secantur a plano quodam circuli obliqui, ΞKO, intersectiones communes eorum parallelae sunt (*E.* XI, 16); sed planorum ΞKO, BZ communis intersectio diameter est circuli ΞKO in puncto O incipiens, proinde communis intersectio circulorum ΞKO, XΦΨ, quae quidem chorda est in puncto Ψ incipiens, parallela est diametro circuli ΞKO in puncto O incipienti. Sed per *circ.* ΞKO producta est recta quaedam, circulorum ΞKO, XΦΨ intersectio communis, circulum illum secans in partes inaequales, nam parallela est diametro circuli ΞKO, atque insistit ei circuli segmentum XΨ cum eo quod superexcurrit, inclinatum versus illud segmentum, quod non maius est semicirculo; dividitur autem segmenti insistentis arcus in partes inaequales in puncto Φ, et *arc.* ΦΨ minor est, quam pars dimidia arcus segmenti insistentis (*a*): ergo recta a puncto Φ iuncta ad punctum Ψ minor est ex omnibus a puncto Φ ad arcum segmenti pertinentibus illius, quod non minus est semicirculo (2); hinc est recta $\Phi\Psi < \Phi K$; sed $\Phi K = HP$ (3), ergo $HP > \Phi\Psi$; et quoniam *circ.* ΦX pro-

a) Quodsi per puncta Ω, E circulus maximus ΩEβ describatur, transibit per polos circulorum BZ, EZ (II, 5.) ergo est *arc.* EZ circuli quadrans, atque circulus maximus ΩEβ circulum BZ in puncto β ita secabit, ut *arc.* Zβ circuli quadrans sit (II, 9.). Deinde si per puncta Ω, Ξ describatur circulus, ΩΞγ, transibit per polos circulorum BZ, ΞO (II, 5), hinc et *arc.* ΞO circuli quadrans est, atque *circ.* BZ ita secatur, ut *arc.* Oγ circuli sit quadrans (II, 9.). Itaque situs est *arc.* ΩΞγ trans *arc.* ΩEβ, quare *arc.* ΩΞγ secabit *arc.* ΨX non inter puncta Ψ, X sed ultra punctum X, ut in puncto α, ita quidem, ut *arc.* Ψα pars sit dimidia totius ambitus segmenti ΨX cômpleti; pervadit enim *circ.* ΩΞγ per polos circulorum ΞO, Ψα. F. 56. a.

Simili modo rem illustrat Arabs Voegelini.

pior est centro sphaerae, quam *circ.* ΠΗΡ, est *circ.* ΧΦΨ > *circ.* ΠΗΡ (I, 6. A.). Quoniam itaque duo circuli ΧΦΨ, ΠΗΡ inaequales sunt, et minor circulus ΠΗΡ, atque productae sunt chordae in illis, in *circ.* ΠΗΡ chorda ΗΡ, in *circ.* ΧΦΨ autem chorda ΦΨ, et quoniam chorda circuli minoris maior est, quam chorda circuli maioris, h. e. ΗΡ > ΦΨ; iam consequitur fore ut sit arcus ΗΡ maior quam similis arcui ΨΦ (*a*); sed est *arc.* ΗΡ ∾ *arc.* ΛΝ, et *arc.* ΦΨ ∾ *arc.* ΝΟ; inde arcus ΛΝ maior est quam similis arcui ΝΟ. Verum sunt circuli eiusdem, ergo est *arc.* ΛΝ > *arc.* ΝΟ.

Propositio 9. Theor.

Si polus parallelorum sit in circulo maximo, quem secant ad angulos rectos circuli duo maximi, alter quidem unus ex parallelis, alter vero obliquus ad parallelos, sumantur autem circuli obliqui arcus aequales non continentes quidem, ad easdem tamen partes maximi parallelorum circuli, atque describantur circuli maximi per puncta terminantia perque polum; inaequales erunt circuli maximi parallelorum arcus inter illos intercepti, et propior circulo maximo primum posito semper erit remotiore maior.

F. 57. Etenim polus parallelorum sit in puncto Α circumductae
F. 58. circuli maximi ΑΒΓ, et circulum ΑΒΓ ad angulos rectos se-
F. 59. cent circuli duo maximi ΔΕΓ, ΒΕ, quorum quidem *circ.* ΒΕ sit unus parallelorum, *circ.* ΔΕΓ autem obliquus ad parallelos; obliqui autem circuli ΔΕΓ sumantur arcus ΖΗ, ΘΚ aequales, non quidem continentes, ad easdem tamen partes parallelorum maximi ΒΕ, atque per puncta Ζ, Η, Θ, Κ polumque Α describantur circuli maximi ΑΖΛ, ΑΗΜ, ΑΘΝ, ΑΚΞ; dico, esse *arc.* ΛΜ > *arc.* ΝΞ.

Est enim *arc.* ΗΘ arcubus ΖΗ, ΘΚ aut commensurabilis, aut non. Sit primum commensurabilis *arc.* ΗΘ arcubus ΖΗ, ΘΚ, dividanturque arcus ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ in partes suas (*b*) in punctis Ο, Π, Ρ, Σ, atque describantur circuli maximi ΟΤ, ΠΥ, ΡΦ, ΣΧ per puncta Ο, Π, Ρ, Σ perque polum Α.

---

a) Cf. pag. 145, not. a.

b) H. e. in partes, quae metiuntur singulae singulos arcus ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ (*E.* X, 3.).

Quoniam igitur arcus ZO, OH, HΠ, ΠP, PΘ, ΘΣ, ΣK deinceps siti mutuo aequales sunt, arcus ΛT, TM, MΥ, ΥΦ, ΦN, NX, XΞ hoc ordine servato se invicem excedunt, ita ut maximus sit *arc.* ΛT (6). Itaque quia *arc.* ΛT $>$ *arc.* NX et *arc.* TM $>$ *arc.* XΞ, totus etiam est *arc.* ΛM $>$ *arc.* NΞ toto.

Proinde non commensurabilis sit *arc.* HΘ arcubus ZH, ΘK; dico, itidem esse *arc.* ΛM $>$ *arc.* NΞ.

Quodsi enim non maior sit, aut minor est, quam ille, aut aequalis ei. Sit primum, si fieri potest, *arc.* ΛM $<$ *arc.* NΞ, uti se habet in forma altera. Ponatur *arc.* ΛM $=$ *arc.* NO, F. 58.
et per polum Λ punctumque O describatur circulus maximus ΠO. Atque tribus eiusdem generis (*a*) inaequalibus propositis arcubus KΘ, ΘΠ, HΘ, sumatur aliquis arcus ΘP, maior quidem quam *arc.* ΘΠ, sed minor quam *arc.* ΘK, commensurabilis autem arcui HΘ (*b*); atque ponatur *arc.* ΘP

---

a) Sunt autem eiusdem generis, quia eiusdem circuli.

b) Id vero effici posse, problemate hoc in universum soluto ostendemus.

Datis tribus quantitatibus eiusdem generis, quarum duae sint inaequales, tertia vero arbitraria, reperire quartam maiorem prima, minorem secunda et commensurabilem tertiae.

Sint datae quantitates AB, AΓ, ΔE, ita ut sit AΓ $>$ AB, et arbitraria ΔE; oportet invenire quartam, quae sit maior quam AB, minor quam AΓ, et commensurabilis ΔE. F. 57.a.

Auferatur dimidia pars a quantitate ΔE, ab excessu iterum dimidia pars et sic deinceps, relinquetur tandem pars quaedam minor quam BΓ (*E.* X, 1.), igitur sit ΔH $<$ BΓ.

Iam significet n numerum integrum, et Π quantitatem quandam minorem quam ΔH, erit aut AB $= n \,.\,$ ΔH, aut AB $= n \,.\,$ ΔH $+$ Π. Alterutro autem casu simul sumtis $n + 1$ quantitatibus ΔH prodeat quantitas Z $= n \,.\,$ ΔH $+$ ΔH; ergo est Z $>$ AB et commensurabilis quantitati ΔE; iam dico, esse quoque Z $<$ AΓ.

1) Nam sit AB $= n \,.\,$ ΔH. Quodsi sit

$$Z \gtreqless A\Gamma$$

sive
$$Z \gtreqless AB + B\Gamma,$$

hinc
$$n \,.\, \Delta H + \Delta H \gtreqless n \,.\, \Delta H + B\Gamma$$

ergo
$$\Delta H \gtreqless B\Gamma;$$

sed est ΔH $<$ BΓ. Posito ergo AB $= n$ ΔH fieri non potest ut sit Z $\gtreqless$ AΓ.

2) Igitur sit rursus AB $= n \,.\,$ ΔH $+$ Π. Quodsi nunc esset

$= arc.\,\Sigma H$ (a), et per puncta Σ, P polumque A describantur circuli maximi ΣT, $P\Upsilon$.

Quoniam igitur est $arc.\,\Sigma H = arc.\,\Theta P$, sequitur $arc.\,TM > arc.\,NO$ (b), sed est $arc.\,\Lambda M > arc.\,TM$, multo magis ergo est $arc.\,M\Lambda > arc.\,NO$, sed etiam aequalis, quod fieri nequit; igitur non est $arc.\,\Lambda M < arc.\,N\Xi$.

Dico deinde, neque aequales esse arcus ΛM, $N\Xi$.

Etenim, si fieri potest, aequales sint, uti se habet in
F. 59. forma tertia, et secentur arcus ZH, ΘK bifariam in punctis O, Π, ac describantur circuli maximi OP, $\Pi\Sigma$ per puncta O, Π polumque A.

Atqui quoniam arcus ZO, OH continentes sibi sunt aequales, ergo arcus ΛP, PM hoc ordine servato sese excedunt, ita ut maximus sit $arc.\,\Lambda P$; igitur $arc.\,\Lambda P > arc.\,PM$ et proinde $arc.\,\Lambda M > 2\,arc.\,MP$. Rursum quia arcus $\Theta\Pi$, ΠK deinceps siti aequales sunt, arcus $N\Sigma$, $\Sigma\Xi$ hoc ordine servato sese excedunt, ita ut $arc.\,N\Sigma$ maximus sit; hinc est $arc.\,N\Sigma > arc.\,\Sigma\Xi$, unde est $arc.\,\Xi N < 2\,arc.\,N\Sigma$.

Atqui quoniam

$$\begin{array}{rl} & arc.\,\Lambda M = arc.\,N\Xi \\ \text{et} & arc.\,\Lambda M > 2\,arc.\,MP \\ \text{et} & arc.\,\Xi N < 2\,arc.\,N\Sigma \\ \hline \text{prodit} & arc.\,PM < arc.\,N\Sigma, \end{array}$$

aequalibus positis arcubus OH, $\Theta\Pi$, quod esse nequit. Itaque

---

$$\begin{array}{rl} & Z \gtreqless A\Gamma \\ \text{sive} & Z \gtreqless AB + B\Gamma, \\ \text{foret etiam} & n\,.\,\Delta H + \Delta H \gtreqless n\,.\,\Delta H + \Pi + B\Gamma \\ \text{ergo} & \Delta H \gtreqless \Pi + B\Gamma; \end{array}$$

sed est $\Delta H < B\Gamma$ et multo magis $\Delta H < \Pi + B\Gamma$; quare vel sic fieri non potest, ut sit $Z \gtreqless A\Gamma$. Proin est $Z < A\Gamma$, quare Z est quantitas quaesita.

Si forte sit $\Delta E < B\Gamma$, per se fiat $Z = 2\,\Delta E$, eritque quantitas quaesita.

Inveniri possunt igitur quantitates Z numero infinitae problemati satisfacientes.

a) Punctum Σ cadet inter puncta H, Z, quia $arc.\,ZH = arc.\,\Theta K$ est.

b) Est enim $arc.\,TM > arc.\,N\Upsilon$ per primam partem demonstrationis, multo magis ergo $arc.\,TM > arc.\,NO$.

non est aequalis arcus ΛM arcui NΞ; sed ostensum est, neque minorem esse, ergo est *arc.* ΛM > *arc.* NΞ.

Propositio 10. Theor.

Si polus parallelorum sit in ambitu circuli maximi, quem duo circuli maximi secant ad angulos rectos, quorum quidem alter est unus ex parallelis, alter autem obliquus ad parallelos; atque in circulo obliquo sumantur utcunque duo puncta ad easdem partes maximi parallelorum; et describantur per haec puncta polumque parallelorum circuli maximi: arcus maximi parallelorum inter primo positum circulum maximum et proxime sequentem per polum interceptus ad arcum circuli obliqui inter eosdem circulos erit, ut proxime sequens arcus maximi parallelorum inter circulos maximos per polum et per puncta sumta descriptos ad arcum quendam minorem arcu circuli obliqui inter duo sumta illa puncta.

Etenim polus parallelorum sit punctum A in ambitu circuli maximi ΑΒΓ, circulumque ΑΒΓ duo circuli maximi ΔΕΓ, ΒΕ secent ad rectos angulos, quorum alter quidem *circ.* ΒΕ sit parallelorum unus, sed *circ.* ΔΕΓ obliquus sit ad parallelos; et in circulo obliquo ΔΕΓ duo puncta Z, H sumantur utcunque ad partes easdem maximi parallelorum *circ.* ΒΕ, atque per puncta Z, H perque polum describantur circuli maximi ΑΖΘ, ΑΗΚ; dico, esse, ut *arc.* ΒΘ ad *arc.* ΔΖ, ita *arc.* ΘΚ ad minorem quendam arcu ΖΗ. F. 60.

Aut enim commensurabilis est arcus ΖΗ arcui ΔΖ, aut non. Sit primo commensurabilis, et dividantur arcus ΔΖ, ΗΖ in partes suas (*a*) in punctis Λ, Μ, Ν, ac describantur circuli maximi ΛΞ, ΜΟ, ΝΠ per puncta Λ, Μ, Ν polumque A.

Quoniam igitur arcus ΔΛ, ΜΛ, ΜΖ, ΖΝ, ΝΗ continentes mutuo sunt aequales, arcus ΒΞ, ΞΟ, ΟΘ, ΘΠ, ΠΚ servato hoc ordine sese excedunt, ita ut *arc.* ΒΞ maximus sit (6). Itaque quia *arc.* ΒΞ, ΞΟ, ΟΘ, ΘΠ, ΠΚ deinceps siti sese excedunt, sed *arc.* ΔΛ, ΛΜ, ΜΖ, ΖΝ, ΝΗ continentes aequales sunt, ac praeterea multitudo arcuum ΒΞ, ΞΟ, ΟΘ aequalis est multitudini arcuum ΔΛ, ΛΜ, ΜΖ, multitudo autem arcuum ΘΠ, ΠΚ

a) Vid. pag. 150. not. b.

aequelis est multitudini arcuum ZN, NH; consequens est, esse *arc.* BΘ : *arc.* BZ > *arc.* ΘK : ZH (*a*). Proinde si efficiamus,

---

a) Demonstratio pendet ab hocce lemmate:

Proposita serie terminorum n, quorum primus maior sit secundo, secundus autem maior tertio, et sic deinceps singuli singulis maiores, quae sequuntur, possunt demonstrari:

1) *terminum primum maiorem esse, quam quotum ex divisione terminorum omnium simul sumtorum per numerum terminorum.*

2) *Terminum ultimum esse minorem, quam quotum ex divisione summae per numerum terminorum.*

3) *Quotum ex divisione summae per numerum terminorum esse maiorem, quam quotum ex divisione summae omnium terminorum, excepto primo, per numerum terminorum unitate mulctatum.*

4) *Quotum ex divisione priorum m terminorum simul sumtorum per numerum m esse maiorem, quam quotum ex divisione reliquorum n — m terminorum simul sumtorum per numerum n — m.*

Denotemus enim elementis a terminum primum, u' terminum $m$tum, a' terminum $(m+1)$mum, u terminum $n$tum sive ultimum, S autem summam totius seriei, S' summam terminorum m priorum, et S'' summam terminorum $n-m$ reliquorum; dico, esse

$$1)\ a>\frac{S}{n};\quad 2)\ u<\frac{S}{n};\quad 3)\ \frac{S}{n}>\frac{S-a}{n-1};\quad 4)\ \frac{S'}{m}>\frac{S''}{n-m};$$

Etenim elementis $d\,d'\,d''\ldots$ terminorum differentias indicantibus inde a prima ad ultimam, erit

$$S=a+a-d+a-d'+a-d''+\ldots=na-(d+d'+d''+\ldots);$$

ergo $\frac{S}{n}=a-\frac{d+d'+d''+\ldots}{n}$, ideoque $\frac{S}{n}<a$,

quod est primum.

Iam significantibus elementis $\delta, \delta'\,\delta''\ldots$ differentias terminorum inde ab ultima ad primam, erit ordine inverso terminorum

$$S=u+u+\delta+u+\delta''+\ldots=nu+(\delta+\delta'+\delta''+\ldots);$$

igitur est $\frac{S}{n}=u+\frac{\delta+\delta'+\delta''+\ldots}{n}$, et proinde $\frac{S}{n}>u$,

quod est alterum.

Deinde quum sit $S=na-(d+d'+d''+\ldots)$

consequitur $S-a=(n-1)\,a-(d+d'+d''+\ldots)$

$$\text{ergo}\ \frac{S-a}{n-1}=a-\frac{d+d'+d''+\ldots}{n-1};$$

$$\text{Sed erat}\ \frac{S}{n}=a-\frac{d+d'+d''+\ldots}{n};$$

$$\text{atque quum sit}\ \frac{d+d'+d''+\ldots}{n-1}>\frac{d+d'+d''+\ldots}{n},$$

$$\text{erit}\ a-\frac{d+d'+d''+\ldots}{n-1}<a-\frac{d+d'+d''+\ldots}{n},$$

ut sit *arc.* BΘ ad *arc.* ΔZ ita ut *arc.* ΘK ad alium quendam, erit ad arcu ZH minorem. Hinc est, ut *arc.* BΘ ad *arc.* ΔZ, ita *arc.* ΘK ad arcum quendam arcu ZH minorem.

Igitur sit non commensurabilis arcus ZH arcui ΔZ; dico, sic quoque *arc.* BΘ esse ad *arc.* ΔZ, ut *arc.* ΘK ad minorem quendam arcu ZH. F. 61,

Nam si non ita, erit tamen aut ad maiorem quendam arcu ZH, aut ad ipsum. Sit primum, si potest, ad arcum ΛZ, maiorem arcu ZH, uti se habet in forma altera. Ideo tribus propositis arcubus ΛZ, ZH, ZΔ inaequalibus sumatur arcus quidam ZM arcu ZΛ minor, arcu ZH autem maior et commensurabilis arcui ZΔ (a); atque per punctum M polumque Λ describatur circulus maximus MN.

Atque quoniam *arc.* ZM, ZΔ commensurabiles sunt, est

$$arc.\, B\Theta : arc.\, \Delta Z = arc.\, \Theta N : arc.\ quend.,\ arcu\ ZM\ minorem.$$

$$\text{quare } \frac{S-a}{n-1} < \frac{S}{n},$$

quod est tertium.

$$\text{Postremo per secundum est } \frac{S'}{m} > u',$$

$$\text{sed est } u' > a', \text{ atque per primum } a' > \frac{S''}{n-m},$$

$$\text{quare prodit } \frac{S'}{m} > \frac{S''}{n-m},$$

quod est quartum.

Idcirco ponamus, *arc.* ΔH divisum esse in partes n aequales, quarum quaeque sit $=$ *arc.* ΔΛ, et quarum priores m comprehendat *arc.* ΔZ, reliquos autem $n-m$ comprehendat *arc.* ZH. Ideo divisus est *arc.* BΘ in partes m, *arc.* ΘK vero in partes $n-m$ inaequales omnes ac deinceps minores (6). Indicet a partem primam, u' partem ultimam arcus BΘ, et a' partem primam arcus ΘK, iam efficitur per ipsum quartum lemmatis nostri, ut sit

$$\frac{arc.\, B\Theta}{m} > \frac{arc.\, \Theta K}{n-m}; \text{ eoque } \frac{arc.\, B\Theta}{m\,.\, arc.\, \Delta\Lambda} > \frac{arc.\, \Theta K}{(n-m)\,.\, arc.\, \Delta\Lambda};$$

Verum est $m\,.\,arc.\,\Delta\Lambda = arc.\,\Delta Z$ et $(n-m)\,arc.\,\Delta\Lambda = arc.\,ZH$,

$$\text{ergo etiam } \frac{arc.\, B\Theta}{arc.\, \Delta Z} > \frac{arc.\, \Theta K}{arc.\, ZH},$$

sive *arc.* BΘ : *arc.* ΔZ > *arc.* ΘK : *arc.* ZH.

a) Vid. pag. 151. not. b.

Sed est

$$arc.\ B\Theta : arc.\ \Delta Z = arc.\ \Theta K : arc.\ Z\Lambda,$$

quare est

$arc.\ \Theta K : arc.\ Z\Lambda = arc.\ \Theta N : arc.$ *quend., arcu* ZM *minorem,* aut alternando

$arc.\ \Theta K : arc.\ \Theta N = arc.\ Z\Lambda : arc.$ *quend., arcu* ZM *minorem.* Verum est $arc.\ \Theta K < arc.\ \Theta N$, ideoque $arc.\ \Lambda Z$ minor est, quam arcus arcu ZM minor; sed maior etiam; quod esse nequit. Non igitur est *arc.* BΘ ad *arc.* ΔZ, ut *arc.* ΘK ad arcum quendam arcu ZH maiorem.

Dico, esse neque ad ipsum.

F. 62. Sit enim, si potest

$$arc.\ B\Theta : arc.\ \Delta Z = arc.\ \Theta K : arc.\ ZH$$

uti se habet in forma tertia, et alteruter arcuum ΔZ, ZH bifariam secetur in punctis Λ, M, perque alterutrum punctorum Λ, M et per polum A describantur circuli maximi ΛN, MΞ.

Quoniam igitur *arc.* ΔΛ, ΛZ continentes aequales sibi sunt, *arc.* BN, NΘ hoc ordine sese excedunt, ut maximus sit *arc.* BN, quare $arc.\ B\Theta > 2\, arc.\ \Theta N$ est. Similiter iam ostendemus, esse quoque $arc.\ K\Theta < 2\, arc.\ \Theta\Xi$. Atqui quoniam est $arc.\ B\Theta > 2\, arc.\ \Theta N$, sed $arc.\ K\Theta < 2\, arc.\ \Theta\Xi$,

ergo est

$$arc.\ B\Theta : arc.\ \Theta N > arc.\ K\Theta : arc.\ \Theta\Xi$$

aut alterne

$$arc.\ B\Theta : arc.\ \Theta K > arc.\ N\Theta : arc.\ \Theta\Xi.$$

Sed est

$$arc.\ B\Theta : arc.\ \Theta K = arc.\ \Delta Z : arc.\ ZH$$

igitur

$$arc.\ N\Theta : arc.\ \Theta\Xi < arc.\ \Delta Z : arc.\ ZH.$$

Verum est

$$arc.\ \Delta Z : arc.\ ZH = arc.\ \Lambda Z : arc.\ ZM$$

ergo

$$arc.\ N\Theta : arc.\ \Xi\Theta < arc.\ \Lambda Z : arc.\ ZM$$

et alterne

$$arc.\ N\Theta : arc.\ \Lambda Z < arc.\ \Theta\Xi : arc.\ ZM.$$

Itaque si efficiamus, ut sit

$arc.\ N\Theta : arc.\ \Lambda Z = arc.\ \Theta\Xi :$ *alium quendam arcum,*

erit ad arcu ZM maiorem, quod fieri non posse ostensum est.

Non igitur est

$$arc.\, B\Theta : arc.\, \Delta Z = arc.\, \Theta K : arc.\, ZH.$$

Sed iam ostensum est, neque ad maiorem esse, ergo est ad minorem. Proin est

$$arc.\, B\Theta : arc.\, \Delta Z = arc.\, \Theta K : arcum\ arcu\ ZH\ minorem.$$

Propositio 11. Theor.

Si parallelorum polus sit in circumducta circuli maximi, quem secant ad angulos rectos maximi duo circuli, quorum alter quidem unus ex parallelis est alter vero obliquus ad parallelos; atque si alius quis circulus maximus, per polos parallelorum descriptus, circulum obliquum secet inter maximum parallelorum illumque, quem obliquus contingit: sphaerae diameter ad diametrum eius circuli, quem obliquus contingit maiorem rationem habet, quam arcus maximi parallelorum inter primo positum circulum maximum et proxime sequentem ad arcum circuli obliqui inter circulos eosdem.

Namque polus A parallelorum sit in circumducta circuli F. 63.
maximi ΑΒΓ, et circulum ΑΒΓ secent ad angulos rectos circuli duo maximi ΒΕΓ, ΔΕΖ, quorum quidem *circ.* ΒΕΓ maximus parallelorum sit, *circ.* ΔΕΖ vero obliquus ad parallelos; alius autem circulus maximus ΑΗΚ per polos parallelorum descriptus secet *circ.* ΔΕΖ inter *circ.* ΒΕΓ et eum, quem contingit *circ.* ΔΕΖ; is autem, quem *circ.* ΔΕΖ contingit, sit *circ.* ΔΛΜ; dico, esse

$$diamet.\, sph. : diam.\, circ.\, \Delta\Lambda M > arc.\, B\Theta : arc.\, \Delta H.$$

Describatur enim per punctum H circulus parallelus ΝΗΞ, et intersectiones communes planorum sint ΑΚ, ΔΖ, ΒΓ, ΝΞ, ΔΜ, ΘΟ, ΗΠ, ΟΗ, ΗΡ.

Quoniam igitur sphaerae circulus maximus ΑΒΓ circulos sphaerae aliquos ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ per polos secat, et bifariam secabit et ad angulos rectos (I, 15.), hinc ΔΜ, ΝΞ, ΒΓ diametri sunt circulorum ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ, et *circ.* ΑΒΓ ad perpendiculum est cuivis circulorum ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ. Atqui quoniam in sphaera sunt circuli paralleli ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ, et per polos recta quaedam ΑΚ ducta, ergo ΑΚ perpendicularis est ad quemque circulorum ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ, transitque

per centra et horum et sphaerae (I, 10.); ideo puncta Σ, Π, O circulorum ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ centra sunt. Et quoniam plana parallela ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ secantur a plano quodam ΑΒΓ, intersectiones eorum parallelae sunt, quare ΔΜ, ΝΞ, ΒΓ mutuo sunt parallelae. Rursus quia duo plana parallela ΝΗΞ, ΒΕΓ a plano quodam ΑΗΚ secantur, intersectiones eorum parallelae sunt, igitur est ΗΠ ‡ ΘΟ. Atqui quoniam rectae duae sibi occurrentes ΝΠ, ΠΗ parallelae sunt duabus rectis ΒΟ, ΟΘ, sibi occurrentibus, neque sunt in eodem plano, ergo aequales comprehendunt angulos (*E.* XI, 10), quare est ΝΠΗ = ΒΟΘ. Et quia circuli ΝΗΞ, ΔΕΖ perpendiculares sunt ad *circ.* ΑΒΓ, circulorum ΝΗΞ, ΔΕΖ intersectio perpendicularis est ad *circ.* ΑΒΓ. Ea vero intersectio est ΗΡ, ergo ΗΡ ad perpendiculum est circulo ΑΒΓ, ideoque cum rectis omnibus ipsi occurrentibus et sitis in plano circuli ΑΒΓ, rectos constituet angulos. Occurrit ei autem alterutra rectarum ΠΡ, ΡΟ, in plano *circ.* ΑΒΓ sitarum, quare rectus est angulorum ΗΡΠ, ΗΡΟ alteruter. Et quia ΑΚ rectae ΝΞ ad perpendiculum est, rectus est angulus ΡΠΟ. Ideo quia ΡΠΟ rectus, acutus est ΠΟΡ angulus, quare recta ΟΡ > ΡΠ (*E.* I, 19). Itaque ponatur ΠΡ = ΡΤ et ducatur ΗΤ. Quoniam ergo ΠΡ = ΡΤ, communis autem ΗΡ, duae iam ΠΡ, ΡΗ duabus ΤΡ, ΡΗ aequales sunt, altera alteri, angulusque rectus ΠΡΗ aequalis est recto ΤΡΗ, ergo basis ΗΠ = ΗΤ atque *tr.* ΠΡΗ ≅ *tr.* ΤΡΗ, et reliqui anguli reliquis sunt aequales, quos latera aequalia subtendunt, unde ΗΠΡ = ΗΤΡ est. Sed est ΗΠΡ = ΘΟΒ, eoque ΗΤΡ = ΘΟΒ. Et quia trianguli ΗΟΡ angulus ad punctum Ρ rectus est et traducta quaedam recta ΗΤ, prodit

ΟΡ : ΡΤ > ΡΤΗ : ΡΟΗ (*a*).

---

a) Quod in hac proportione Theodosius proponit sine demonstratione, iam Archimedes his ipsis verbis expressit (*Aren. pag.* 324 *ed. Torelli.* §. 5 *vers. nostrae.*):

„*Si duorum triangulorum rectangulorum latera, quae circa rectum angulum sunt, altera quidem aequalia sunt, altera vero inaequalia, angulorum, qui inaequalibus lateribus adiacent, maior ad minorem, minorem rationem habet, quam laterum, quae circa rectum angulum sunt, maius ad minus.*“

F. 63. a. Etenim trianguli rectanguli ΗΡΟ rectus angulus sit ΗΡΟ, ac demittatur recta arbitraria ΗΤ ex puncto Η ad cathetum ΡΟ; deinde ducatur

Verum est

$$PT = P\Pi \text{ et } PTH = \Theta OB,$$

quocirca

$$OP : P\Pi > BO\Theta : POH.$$

Sed est

$$PO : P\Pi = O\Delta : \Delta\Sigma = \Delta Z : \Delta M$$

atque

$$BO\Theta : POH = arc. B\Theta : arc. \Delta H$$

igitur

$$Z\Delta : \Delta M > arc. B\Theta : arc. \Delta H.$$

Et est ΔZ diameter sphaerae, ΔM vero diameter circuli $\Delta\Lambda M$, quare diameter sphaerae ad diametrum circuli $\Delta\Lambda M$ maiorem habet rationem, quam *arc.* $B\Theta$ ad *arc.* ΔH.

Propositio 12. Theor.

Si circuli maximi sphaerae contingant eundem parallelorum, similes parallelorum arcus intercipientes inter se, alius autem circulus maximus, obliquus ad parallelos, contingat maiores, quam quos primo positi contigerant, atque secet illos unum eundemque contingentes inter maximum parallelorum et illum, quem primo positi contigerant, duplicata sphaerae diameter ad diametrum eius

---

$O\Phi \ddagger TH$ et producantur $P\Pi$, OP ad Φ, Ω, atque centro O, intervallo autem OH describatur *circ.* $\Psi H\Omega$; dico, esse $OP : PT > PTH : POH$.

Nam quum sit *triang.* $\Phi HO >$ *sect.* ΨHO

et *triang.* $HOP <$ *sect.* ΩHO,

$$\text{erit } \frac{triang.\ \Phi HO}{triang.\ HOP} > \frac{sect.\ \Psi HO}{sect.\ \Omega HO},$$

$$\text{ergo } \frac{tr.\ \Phi HO + tr.\ HOP}{tr.\ HOP} > \frac{sect.\ \Psi HO + sect.\ \Omega HO}{sect.\ \Omega HO}$$

$$\text{hoc est } \frac{tr.\ \Phi OP}{tr.\ HOP} > \frac{sect\ \Psi O\Omega}{sect.\ HO\Omega},$$

sive *tr.* ΦOP : *tr.* $HOP >$ *sect.* $\Psi O\Omega$: *sect.* $HO\Omega$;

sed est *tr.* ΦOP : *tr.* $HOP = \Phi P : HP = OP : TP$ (*E.* VI, 1. 4.)

et *sect.* $\Psi O\Omega$: *sect.* $HO\Omega = \Phi OP : HOP = HTP : HOP$ (*E.* VI, 33.)

hinc est $OP : TP > HTP : HOP$.

Ipsam propositionem non demonstrat Archimedes, sed ut notam usurpat aut demonstratu facilem. Recentiores ita vero significant: si ponatur $\alpha > \beta$, est $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{tang.\ \alpha}{tang.\ \beta}$, quum sit $OP : TP = tang.\ HTP : tang.\ HOP$.

circuli, quem circulus obliquus contingit, rationem habet maiorem, quam arcus maximi parallelorum inter contingentes unum eundemque circulum ad arcum circuli obliqui inter circulos eosdem.

F. 64. In sphaera enim circuli ΑΒ, ΓΔ contingant parallelorum eundem *circ.* ΑΓ in punctis Α, Γ, similes parallelorum circulorum arcus inter sese intercipientes; alius vero circulus maximus ΕΖ, obliquus ad parallelos, contingat maiores, quam quos circuli ΑΒ, ΓΔ contingunt, atque *circ.* ΕΖ secet circulos ΑΒ, ΓΔ inter maximum parallelorum illumque *circ.* ΑΓ, quem circuli ΑΒ, ΓΔ contingunt. Sit autem *circ.* ΜΒΞ parallelorum maximus, et ille, quem *circ.* ΕΖ contingit, sit *circ.* ΕΗ; dico, duplicatam sphaerae diametrum ad diametrum circuli ΕΗ rationem habere maiorem, quam *arc.* ΒΔ ad *arc.* ΘΚ.

Namque punctum Λ sit polus parallelorum, et describantur per Λ et per quodvis punctorum Ε, Θ, Κ circuli maximi ΛΕΜ, ΛΘΝ, ΛΚΞ, sed per Κ describatur circulus maximus ΟΚ, per Θ vero circulus maximus ΘΠ, circulum ΕΗ contingens in Π (II, 15.).

Quoniam igitur in sphaera sunt duo circuli paralleli ΟΚ, ΕΠΗ, et descripti duo circuli maximi ΕΘΚΖ, ΟΘΠ, circulum ΕΠΗ contingentes in punctis Ε, Π, per punctum Θ vero polumque Λ circulus maximus ΛΘΡ descriptus est, consequitur esse *arc.* ΟΡ $=$ *arc.* ΡΚ (*a*), eoque *arc.* ΡΣ $<$ *arc.* ΡΚ, quare *arc.* ΣΚ $<$ 2 *arc.* ΚΡ est. Sed est *arc.* ΣΚ $\backsim$ *arc.* ΒΔ (II, 13) et *arc.* ΚΡ $\backsim$ *arc.* ΝΞ (II, 10.), ergo *arc.* ΒΔ $>$ 2 *arc.* ΝΞ. Et quia est

diam. sph. : *diam. circ.* ΕΗ $>$ *arc.* ΜΝ : *arc.* ΕΘ (11.)

atque

arc. ΜΝ : *arc.* ΕΘ $>$ *arc.* ΝΞ : *arc.* ΘΚ (10.),

iam consequitur, esse

diam. sph. : *diam. circ.* ΕΠΗ $>$ *arc.* ΝΞ : *arc.* ΘΚ

---

a) Mente concipias per punctum Θ descriptum circulum parallelum circulis ΕΗ, ΟΚ, erit *arc.* ΘΟ $=$ *arc.* ΘΚ (II, 13.) hinc et *chord.* ΘΟ $=$ *chord.* ΘΚ; atque segmentum ΡΘΛ cum eo quod superexcurrit ad rectos angulos insistit diametro circuli paralleli ΟΚ, eo quod per polos eius transit (I, 15.), arcus autem ipsius segmenti in puncto Θ dividitur in partes inaequales, ergo *arc.* ΟΡ $=$ *arc.* ΡΚ (II, 11.).

et proinde

$$2\,diam.\,sph. : diam.\,circ.\,\mathrm{E\Pi H} > 2\,arc.\,\mathrm{N\Xi} : arc.\,\Theta\mathrm{K};$$

sed est

$$2\,arc.\,\mathrm{N\Xi} : arc.\,\Theta\mathrm{K} > arc.\,\mathrm{B\Delta} : arc.\,\Theta\mathrm{K},$$

quia

$$2\,arc.\,\mathrm{N\Xi} > arc.\,\mathrm{B\Delta}.$$

Multo magis igitur est

$$2\,diam.\,sph. : diam.\,circ.\,\mathrm{E\Pi H} > arc.\,\mathrm{B\Delta} : arc.\,\Theta\mathrm{K}.$$

Propositio 13. Theor.

Si circuli sphaerae paralleli abscindant arcus aequales maximi cuiusdam circuli usque ad parallelorum maximum, per puncta vero terminantia describantur circuli maximi sive per polos parallelorum sive contingentes unum eundemque parallelorum; intercipient inter se arcus aequales maximi parallelorum.

Etenim sphaerae circ. paralleli AB, ΓΔ maximi cuiusdam circuli AΔ abscindant arcus aequales AE, EΔ usque ad maximum parallelorum, et per puncta A, E, Δ describantur circuli maximi AZΓ, ΘEK, BHΔ, sive per polos parallelorum, sive contingentes unum eundemque parallelorum; dico, esse *arc.* ZE = *arc.* EH. F. 65.

Nam quia paralleli sphaerae circuli AB, ΓΔ maximi cuiusdam circuli AEΔ abscindunt arcus aequales AE, EΔ usque ad maximum parallelorum ZH, sequitur *circ.* AB = *circ.* ΓΔ (II, 17.). Quoniam igitur sphaerae circuli AB, ΓΔ aequales et paralleli abscindunt circuli cuiusdam maximi ΘK arcus ΘE, EK aequales usque ad parallelorum maximum ZH, sequitur *arc.* ΘE = *arc.* EK (II, 18.). Sed est *arc.* AE = *arc.* EΔ, quare recta AΘ = KΔ rectae (3). Ac sunt aequales circuli, ergo *arc.* AΘ = *arc.* KΔ, itaque *arc.* AΘ ∾ *arc.* KΔ. Verum est *arc.* AΘ ∾ *arc.* ZE, et *arc.* KΔ ∾ *arc.* EH (II, 10. *vel* 13.), igitur *arc.* EZ ∾ *arc.* EH. Et sunt eiusdem circuli, proinde est *arc.* ZE = *arc.* EH.

Propositio 14. Theor.

Si maximus sphaerae circulus aliquem sphaerae circulum contingat, alius vero circulus maximus, obliquus ad parallelos,

contingat maiores, quam quos primo positus contigerat; arcus inter se intercipient dissimiles circulorum parallelorum, maioresque quam similes semper erunt polorum alterutro propiores remotioribus.

F. 66. Circulus enim sphaerae maximus ΑΒΓ contingat in puncto Α sphaerae aliquem circulum ΑΔΞ, sed alius circulus maximus ΒΕΓ, oblique positus ad parallelos, contingat maiores, quam quos *circ.* ΑΒΓ contingit; dico, fore ut dissimiles intercipiant inter se parallelorum arcus, et ut maiores quam similes semper sint propiores polorum alterutro, quam remotiores.

Sumantur enim in circulo obliquo ΒΓ duo quaelibet puncta Ε, Κ, et describantur circulo ΑΔΞ circuli paralleli ΖΕΗ, ΘΜΛ per puncta Ε, Κ; dico, esse arcum ΕΗ maiorem quam similem arcui ΚΛ, et arcum ΘΚ maiorem quam similem arcui ΖΕ.

Describantur enim per puncta Ε, Κ circuli maximi ΔΕΜ, ΞΝΚ, circulum ΑΔΞ contingentes, ita ut neque semicirculus a puncto Δ ad partes Μ porrectus concurrat cum semicirculo a puncto Α ad partes Θ porrecto, neque semicirculus a puncto Ξ porrectus ad partes Κ cum semicirculo a puncto Α ad partes Λ porrecto.

Atqui quoniam semicirculi ΑΛ, ΞΚ non concurrunt, inter quos parallelorum circulorum sunt arcus ΝΗ, ΚΛ, ergo est *arc.* ΝΗ ∾ *arc.* ΚΛ (II, 13.). Iisdem ex rationibus est *arc.* ΖΕ ∾ *arc.* ΘΜ; atque quia *arc.* ΝΗ ∾ *arc.* ΚΛ, sequitur esse *arc.* ΕΗ maiorem quam similem arcui ΚΛ. Iisdem ex rationibus *arc.* ΘΚ etiam maior est quam similis arcui ΖΕ, quod oportebat ostendere.

Appendix,

Additamenta complectens tum Arabis integra, tum recentiorum selecta.

Liber primus.

Ad definitiones.

Ad def. 3. Loco eius Arabs Voegelini exhibet has duas:

3. a., (3.) *Diameter sphaerae est quaelibet recta, quae per centrum ducta terminatur ab utraque parte in superficie sphaerae.*

3. b., (4.) *Axis sphaerae est diameter, circum quam quiescentem circumvolvitur sphaera.*

Ad def. 4. Hanc subsequitur apud Voegelinum:

4. a., (6.) *Sphaerae dicuntur aequales, quarum diametri aequales sunt.*

Ad def. 5. Insequuntur apud Voegelinum quattuor hae:

5. a., (8.) *Circuli sphaerae dicuntur distare a centro intervallo aequali, quando perpendicula ex centro sphaerae ad circulorum plana demissa aequalia sunt.*

5. b., (9.) *Circulus a centro magis remotus est, in quem cadit perpendiculum maius.*

5. c., (10.) *Planum ad planum dicitur inclinari, quando rectae in utroque plano planorum intersectioni in arbitrario puncto ad perpendiculum erectae comprehendunt angulum acutum.*

5. d., (11.) *Inclinatio autem dicitur excessus anguli recti et anguli illius acuti (a).*

Ad def. 6. Arabs Voegelini addit has:

6. a., (13.) *Quorum vero planorum anguli minores sunt, magis inclinata sunt.*

6. b., (14.) *Planum dicitur contingere sphaeram, quando quidem tangit, at non secat, quocunque producta fuerit.*

Postremo invenitur apud Voegelinum hocce:

Postulatum. *Ex quocunque puncto superficiei sphaerae circulum describere intervallo quocunque (b).*

Post propos. 3.

Corollarium. *Hinc fit, si duo puncta signentur in superficie sphaerae, ut recta, quae illa connectit, intra sphaeram cadat. (Clavius).*

Post propos. 8.

Prop. 8. a. Theor. (9.) *Perpendiculum e centro cuiuslibet circuli sphaerae plano eius erectum et utrimque productum necessario transibit per polos circuli. (Voeg.)*

F. 9. Sit ut prius in sphaera *circ.* ΑΒΓΘ, cuius centrum sit E, atque erigatur a puncto E circuli plano perpendiculum, quod productum occurrat superficiei sphaerae in punctis Z, H; dico, puncta Z, H polos esse circuli.

Quemadmodum in prop. 8, ex definitione rectae perpendicularis ad planum demonstrabitur.

---

a) Rectius concludens et magis consentanea videtur haec definitio Arabis, quam illa Euclidis (XI, 6.), qua angulus ipse acutus inclinatio appellatur; etenim inclinationis appellationem significare oportet, quantum angulus recedat ab angulo recto, at, uti nunc est iubente Euclide, maior inclinationis angulus respondet inclinationi minori.

b) Dummodo ne excedat maximi circuli diametrum.

Prop. 8. b. Theor. (10.) *Recta ab altero polo circuli cuiuslibet sphaerae ad centrum ducta perpendicularis est plano eius. (V.)*

Sit in sphaera circulus ΑΒΓΘ, cuius centrum E et alter polorum Z; iungatur EZ; iam dico, EZ esse ad perpendiculum plano circuli ΑΒΓ. F. 9.

Ducantur enim in eo ubicunque binae diametri ΑΓ, ΒΘ et iungantur AZ, BZ, ΓZ, ΘZ, sibi aequales ex definitione poli (*Def.* 5.). Hinc quattuor anguli, quos recta EZ facit cum rectis ΑΓ, ΒΘ, recti sunt, ergo EZ ad perpendiculum est utrique, unde et plano circuli ΑΒΓΘ (*E.* XI, 4.).

Post propos. 10.

Prop. 10. a. Theor. (13.) *Si ab altero polo alicuius circuli sphaerae iungatur recta ad centrum sphaerae et producatur, donec occurrat superficiei sphaericae ad alteras partes circuli, necessario cadet in polum alterum. (V.)*

Sit sphaerae circulus AB, et alter polus Γ, sphaerae centrum H; ducatur ΓΔ et producatur, donec occurrat superficiei sphaericae ad partes alteras circuli illius in puncto E; iam dico, punctum E polum alterum esse circuli AB. F. 11. a.

Ductis enim EA, EB iungantur puncta Γ, Δ cum punctis A, B, erit ΓA = ΓB et ΔA = ΔB atque communis est ΓΔ, quare AΓΔ = ΔΓB, unde EA = EB, quia ΓE communis est. Similiter etiam ostendemus, omnes quoque a puncto E ad circuli AB ambitum productas invicem aequales esse, igitur est E polus *circ.* AB.

Corollarium 1. *Itaque manifestum est, fore ut unusquisque circulus maximus per alterum circuli sphaerae polorum pervadens transeat etiam per alterum. (V.)*

Corollarium 2. *Et quia diameter circuli maximi etiam diameter est sphaerae, manifestum est, utrosque polos circuli cuiuslibet in sphaera per diametrum esse oppositos, atque adeo inter ipsos interpositum esse semicirculum maximi circuli. (C.)*

Prop. 10. b. Theor. (14). *Si a centro sphaerae ad centrum circuli in sphaera recta iungatur et producatur, donec cum superficie sphaerae ad utrasque partes concurrat; necessario cadet in circuli polos. (V.)*

F. 11. a. Punctum H sit centrum circuli AB, et Δ sit centrum sphaerae, iungatur ΔH et producatur, donec sphaerae superficiei occurrat in punctis Γ, E; erit ΔΓ plano circuli AB ad perpendiculum (7.), quare constat propositum ex 8. a.

Scholion. Propositiones 7 ad 10 cum corollariis ad propositiones 1 et 2 et cum additamentis Arabicis, si rem vere examinemus, non nisi unum theorema constituunt, quo edicitur, quibus modis quinque conditiones singulae spectent ad se invicem, quas equidem nunc propono, addito deinceps theoremate ipso:

A. Recta transit per centrum sphaerae.

B. Recta transit per centrum circuli alicuius sphaerae.

C. Recta circulo aliquo sphaerae insistit ad angulos rectos.

D. Recta transit per polum unum circuli sphaerae.

E. Recta transit per polum alterum circuli sphaerae.

Est autem theorema hocce:

Harum conditionum datis binis locum habent etiam reliquae.

Hinc lege combinationum decem discerni possunt casus; sed ubi aut conditio D aut E datur cum conditionibus A, B, C singulis, idem casus exit, nam datis singulis A, B, C nihil refert, utrum data sit D an E. Septem igitur casus sunt ipsa natura diversi, quos in brevi conspectu adponam:

casus:	ponitur:	consequitur:
I.	A. B.	C. D. E.
II.	A. C.	B. D. E.
III.	A. D. (sive E.)	B. C. E. (sive D.)
IV.	B. C.	A. D. E.
V.	B. D. (sive E.)	A. C. E. (sive D.)
VI.	C. D. (sive E.)	A. B. E. (sive D.)
VII.	D. E.	A. B. C.

Casuum horum quinque tractat Theodosius, nimirum:

1) Casum I. in propos. 7; sed desunt conclusiones D, E.

2) Casum II. in propos. 8 et in propos. 1, Cor. 2.
3) Casum IV. in propos. 2, Cor.; desunt autem conclusiones D, E.
4) Casum VI. in propos. 9; sed deest conclusio A.
5) Casum VII. in propos. 10.

Arabis additamenta subvehunt:

1) Complementum casus I. in propos. 10. b.
2) Casum III. in propos. 10. a.; desunt autem conclusiones B, C.
3) Complementum casus IV. in propos. 8. a.
4) Casum V. in propos. 8. b.; desiderantur autem conclusiones A, E (sive D.).

Equidem intellexit Arabs, theorematum conversa Theodosium tractasse non omnia, sed ex parte tantum, at fugit eum, qua lege communi ad se invicem referrentur conditiones A, B, C, D, E.

Acutius iudicat Clavius, addens corollarium sequens:

„Ex his omnibus constat, in sphaera quattuor haec puncta, nempe duo, polos cuiusque circuli, eiusdem centrum et centrum sphaerae, perpetuo in una recta, nempe diametro sphaerae, existere, et ipsam quidem diametrum ad planum eiusdem circuli esse perpendicularem; adeo ut recta per quaelibet duo puncta ex his ducta transeat per reliqua duo sitque ad planum circuli perpendicularis; et recta per unum eorum ducta perpendicularis ad planum circuli transeat quoque per tria puncta reliqua.“

Inde factum est, ut additamenta Arabis manca quodam modo suppleverit, videlicet in prop. 8. b. addit conclusionem E (sive D), et in prop. 10. a. conclusiones B, C, neque tamen rem penitus perspexisse, omnibusque suis numeris explevisse videtur, quum et in prop. 8. b., et in prop. 9. desideratae conclusionis A mentionem non fecerit.

Quid Barrovium adduxerit, ut propp. 8. a. et b. omitteret, quum propp. 10. a. et b. recepisset, magis miror eo quod Clavii corollarium utique protulit in medium.

Quomodo denique propp. 7 ad 10 cum supplementis suis ad circulum maximum facili negotio accommodentur, iam in aperto est. (*N.*)

Post propos. 15.

Prop. 15. a. Theor. (20.) *Sphaerae circulus per polos alius circuli sphaerae pervadens circulus maximus est, et secat eum in partes aequales, atque insistit ei ad angulos rectos. (V.)*

F. 14. Etenim ΑΒΓΔ sit circulus sphaerae, pervadens per polos circuli ΒΕΔΖ, quae sint puncta Α, Γ; dico, *circ.* ΑΒΓΔ esse maximum, eumque secare *circ.* ΒΕΔΖ et bifariam et ad angulos rectos.

Iungatur enim ΑΓ, quae in plano circuli ΑΒΓΔ est, propterea quod hic transit per puncta illa. Sed ΑΓ transit per centrum sphaerae (10.), igitur *circ.* ΑΒΓΔ maximus est (6. A.). Reliqua efficiuntur per prop. 15.

Prop. 15. b. Theor. (21.) *Circulus circulum sphaerae secans bifariam et ad angulos rectos, maximus est, et per polos eius transit.*

F. 14. Nam ΑΒΓΔ sit circulus sphaerae, secetque *circ.* ΒΕΔΖ bifariam et ad perpendiculum; dico, *circ.* ΑΒΓΔ esse maximum eumque transire per polos *circ.* ΒΕΔΖ.

Sit enim ΒΔ intersectio circulorum, erit ΒΔ diameter circuli ΒΕΔΖ, atque adeo divisa recta ΒΔ bifariam in puncto Θ, erit Θ circuli huius centrum. Erigatur in plano circuli ΑΒΓΔ perpendicularis ΘΑ ad ΒΔ, erit ΘΑ perpendicularis etiam plano circuli ΒΕΔΖ; nam erecta in plano circuli ΒΕΔΖ recta perpendiculari ΘΚ ad ΒΔ, erit ΘΑ perpendicularis et ad ΒΔ et ad ΘΚ (*E.* XI, *Def.* 4.), igitur etiam ad planum ΒΕΔΖ. Proinde recta ΘΑ pervadit per centrum sphaerae (2. *Cor.*), itaque *circ.* ΑΒΓΔ maximus est (6. *A.*). Reliqua autem efficiuntur per propp. 13 aut 14.

S c h o l i o n. Propositiones 13, 14, 15 cum Arabis additamentis conferri possunt in unum theorema, quo proponitur, qua ratione ad se mutuo pertineant quinque conditiones hae:

A. C i r c u l u s s p h a e r a e s e c a t u r i n c i r c u l o m a x i m o.

B. C i r c u l u s s p h a e r a e s e c a t u r a d p e r p e n d i c u l u m.

C. C i r c u l u s s p h a e r a e s e c a t u r b i f a r i a m.

D. C i r c u l u s s p h a e r a e s e c a t u r p e r p o l u m u n u m.

E. Circulus sphaerae secatur per polum alterum.

Est autem theorema hocce:

Datis harum conditionum binis reliquae etiam admittuntur.

Singulos casus in conspectu ponere licet simili ratione, qua factum est in scholio ad prop. 10. b.; igitur te illuc relegari patiaris.

Theodosio ipsi non nisi tres casus tractantur:

1) Casus I. in prop. 13.
2) Casus II. in prop. 14.
3) Casus III in prop. 15, data tamen conditione una supra modum iustum. Ponitur enim, circulum maximum transire non solum per unum polorum, sed per alterum etiam, quum sufficiat illud.

Addit autem Arabs duos hos:

1) Casum IV. in prop. 15. b.
2) Casum VII. in prop. 15. a.

Casus denique V. et VI. omisit quos ita propono:

Prop. 15. c. Theor. (Casus V.). *Si circulus sphaerae alium quendam sphaerae circulum secet et ad perpendiculum et per unum polorum, maximus est, atque bifariam secat circulum, transitque per alterum eius polum.*

Sphaerae circulus ΑΒΓΔ secet *circ.* ΒΕΔΖ ad angulos rectos et pervadat per polum eius Α; dico, *circ.* ΑΒΓΔ maximum esse, eumque secare circulum ΒΕΔΖ bifariam et pervadere per alterum polum. F. 14.

Demissa enim perpendicularis ΑΘ ex puncto Α ad planum *circ.* ΒΕΔΖ occurret centro huius circuli (9). Est autem perpendiculum in plano circuli ΑΒΓΔ, ergo bifariam secat circulus ΑΒΓΔ circulum ΒΕΔΖ. Reliqua efficiuntur per propositionem 15. b.

Prop. 15. d. Theor. (Casus VI.) *Si circulus sphaerae secet alium quempiam in partes duas aequales atque transeat per polorum unum; maximus est, aliumque secat et ad rectos angulos et per polum alterum.*

F. 14. Sphaerae circulus ΑΒΓΔ secet *circ.* ΒΕΔΖ et bifariam et per polum Α; dico, maximum esse *circ.* ΑΒΓΔ, eumque secare *circ.* ΒΕΔΖ et ad angulos rectos et per alterum polum.

Etenim ΒΔ sit intersectio circulorum amborum, secetur ΒΔ bifariam in puncto Θ et iungatur ΑΘ; iuncta erit in plano circuli ΑΒΓΔ. Quoniam autem Θ centrum est circuli ΒΕΔΖ, et Α polorum unus, erit recta ΑΘ circulo ΒΕΔΖ ad perpendiculum (8. *b.*), itaque secat *circ.* ΑΒΓΔ circulum ΒΕΔΖ ad angulos rectos. Reliqua prodeunt ex prop. 15. b.

Haec ambo theoremata nec apud Clavium, nec apud Barrovium reperiuntur, at praemittunt uterque propositionibus 15 a et b aliud hocce theorema, quod non exstat apud Voegelinum:

Prop. 15. e. Theor. *Si in sphaera maximus circulus per polos alterius cuiuspiam maximi circuli transeat, transibit vicissim hic per polos illius.*

F. 14. a. In sphaera transeat maximus circulus ΑΒΓΔ per circuli ΒΗΔΕ polos Α, Γ; dico, et maximum circulum ΒΗΔΕ transire per polos *circ.* ΑΒΓΔ.

Quoniam enim maximus *circ.* ΑΒΓΔ transit per polos maximi *circ.* ΒΗΔΕ, insistit ei ad angulos rectos, igitur vicissim maximus *circ.* ΒΗΔΕ ad rectos angulos insistit circulo ΑΒΓΔ, ideoque pervadit per polos eius.

Postremo additur in versione Voegelini theorema sequens:

Prop. 15. f. Theor. (22.). *Si in sphaera sit circulus, et ab altero polorum eius ad planum ipsius demissa perpendicularis aequalis sit semidiametro eius, maximus est circulus. (V.)*

F. 14. a. In sphaera sit *circ.* ΑΒΓΔ, et demissa ex eius polo Ε sit ΕΖ perpendicularis ad *circ.* ΑΒΓΔ, atque aequalis sit ΕΖ semidiametro circuli ΑΒΓΔ; dico, *circ.* ΑΒΓΔ maximum esse.

Etenim perpendicularis ΕΖ incidet in centrum Ζ circuli ΑΒΓΔ atque producta pervadet per alterum polum Η, hinc ΕΖ transibit per centrum sphaerae (2. *Cor.*). Ducatur utcunque per rectam ΕΗ planum, faciens in sphaera circulum ΒΗΔΕ, qui erit maximus (6. *A.*). Secet autem *circ.* ΑΒΓΔ in punctis Β, Δ, et ducatur radius $\Delta Z = EZ$ (*ex hyp.*). Sed ΕΖΔ angulus rectus est (*E.* XI, 3.), ergo est $EZ : Z\Delta = Z\Delta : ZH$ (*E.* VI, 13.). Verum est $EZ = Z\Delta$, igitur et $Z\Delta = ZH$, unde

EZ = ZH, eoque punctum Z sphaerae centrum est. Simul autem punctum Z centrum est circuli ΑΒΓΔ, ideoque maximus est hic circulus (6. *A.*).

Ita fere demonstrationem conficit Clavius, quem secutus sum, ne cum Arabe lectores defatigarem (*N.*).

Post propos. 16.

Prop. 16. a. Theor. (24.) *Si recta ex polo cuiusdam circuli sphaerae ad ambitum eius ducta aequalis sit lateri quadrati in eodem circulo descripti; circulus ipse maximus est. (V.)*

Sit in sphaera *circ.* ΑΒΓΔ, cuius centrum E, polus autem F. 15.
Z, et recta ex polo ducta ZA, denique AB latus quadrati inscripti, et sit ZA = AB; dico, *circ.* ΑΒΓΔ maximum esse.

Nam quia est

$$AZ^2 = EZ^2 + AE^2$$
$$\text{et } AB^2 = AE^2 + BE^2$$
$$\text{consequitur } EZ^2 + AE^2 = AE^2 + BE^2$$
$$\text{igitur } EZ^2 = BE^2, \text{ eoque } EZ = BE.$$

Sed quoniam EZ perpendiculum est ex polo circuli ΑΒΓΔ ad ipsum demissum, BE autem radius circuli eiusdem, consequens est, *circ.* ΑΒΓΔ esse maximum (15. f.).

Post propos. 19.

Prop. 19. a. Theor. (28.). *Si a polo circuli sphaerae ducatur chorda quaedam aequalis chordae ex polo eodem ad circumductam circuli, terminatur illa in ipsa circuli circumducta. (V.)*

Sphaerae circulus sit ZBE, punctum A vero polus alter F. 18. a.
et AB chorda sit ex polo ad ambitum circuli ZBE. Ducatur chorda AΔ utcunque ex polo et sit AΔ = AB; dico, punctum Δ esse in ambitu circuli ZBE.

Etenim si potest, non sit punctum Δ in huius circuli ambitu. Producatur per chordam AΔ centrumque sphaerae planum, quod constituet circulum maximum AΔΓ (6. *A.*), et concurret cum circulo ZBE in punctis superficiei sphaericae duobus, uti in Z, Γ. Quodsi punctum Δ ponatur non esse in ambitu circuli ZBE, punctum Δ neque in Γ erit, neque in Z.

Iuncta vero AE est recta AE = AΔ = AB, ideoque *arc.* AE = *arc.* AΔ (*E.* III, 28.), quod esse nequit; proinde punctum Δ erit in ipsa circumducta circuli ZBE.

Post propos. 21.

Corollarium. *Si maximus circulus transeat per polos alterius circuli maximi, transibit contra et hic per polos illius. Omnes deinde circuli maximi sese secantes transeunt per polos suos mutuo. (V.)*

F. 20. Etenim si circulus maximus ABΓ transeat per polos circuli maximi AZΘ, circulus ille secabit hunc ad angulos rectos (15.), et proinde hic secabit illum ad angulos rectos, ideoque *circ.* AZΘ transibit etiam per polos *circ.* AΓB (13). Verum si circulorum maximorum alter alterum secet ad perpendiculum, transibit etiam per polos eius.

Prop. 21. a. Theor. (31.). *Si a puncto superficiei sphaericae ubicunque posito plures quam duae rectae aequales pertineant ad ambitum circuli cuiusdam sphaerae; punctum illud polus est circuli. (V.)*

F. 20. a. In superficie sphaerae ABΓ sumtum sit punctum A, abs quo tres rectae aequales AΔ, AE, AZ pertineant ad ambitum *circ.* BΔΓ; dico, punctum A polum esse *circ.* BΓ.

Demittatur enim a puncto A perpendiculum AH ad planum *circ.* BΓ, et iungantur rectae HΔ, HE, HZ, anguli omnes tres ad H recti erunt. Itaque est

$$A\Delta^2 = AH^2 + H\Delta^2$$
$$AE^2 = AH^2 + HE^2$$
$$AZ^2 = AH^2 + HZ^2.$$

sed est $A\Delta^2 = AE^2 = AZ^2$

ergo $AH^2 + H\Delta^2 = AH^2 + HE^2 = AH^2 + HZ^2$

quare $H\Delta^2 = HE^2 = HZ^2$, eoque $H\Delta = HE = HZ$; igitur punctum H centrum est *circ.* BΓ (*E.* III, 9.), ideoque recta HA per polum *circ.* BΔΓ pervadit, ergo est A polus ipse (8. *a.*).

Prop. 21. b. Theor. (32.). *Circuli in sphaera omnes, a quorum polis ad ambitus eorum ductae rectae sunt aequales, inter se erunt aequales. (V.)*

In sphaera ΑΒΓΔΕΖ, cuius centrum Η, sint duo circuli ΒΖ, ΕΓ, a quorum polis Α, Δ rectae ΑΖ, ΔΕ ad ambitus eorum ductae aequales sint; dico, circulos ΒΖ, ΕΓ aequales esse. F. 20. b.

Demittantur enim a polis ad plana circulorum perpendicula ΑΘ, ΔΙ, quae per centra Θ, Ι et producta per polos reliquos circulorum ideoque per sphaerae centrum Η transibunt. Iam ductis sphaerae radiis ΖΗ, ΕΗ, radiisque ΖΘ, ΕΙ circulorum erit ΑΗ = ΔΗ, ΗΖ = ΗΕ, ΑΖ = ΔΕ, ergo ΑΗΖ = ΔΗΕ, sed anguli ad puncta Θ, Ι aequales sunt, quia recti, igitur est *triang.* ΖΗΘ $\cong$ *triang.* ΕΗΙ (*E.* I, 26.), quare ΖΘ = ΕΙ, eoque *circ.* ΒΖ = *circ.* ΕΓ.

Corollarium. *Valet etiam conversa propositio: Circulorum in sphaera aequalium aequales sunt rectae a polis eorum ad ambitus productae.* (*V.*)

Constructis enim iisdem ponantur aequales circuli ΒΖ, ΕΓ; dico, rectas ΑΖ, ΔΕ aequales esse. Similiter enim ostendemus, esse ΖΘ = ΕΙ; circuli autem ipsi aequaliter distant a centro sphaerae (6. *B.*); igitur est ΗΘ = ΗΙ, ergo ΑΘ = ΔΙ, unde efficitur, esse ΑΖ = ΔΕ (*E.* I, 4.).

Clavium secutus sum in demonstrandis hisce propositionibus 21. a et b, quoniam Arabis taedii plena ratio est. (*N.*)

Liber secundus.

Post propos. 2.

Prop. 2. a. Theor. (3.). *In sphaera circuli aequales et aequidistantes non plures sunt quam bini. (V.)*

F. 21. a. Sint enim, si fieri potest, circuli tres aequales et aequidistantes AB, ΓΔ, EZ, erunt circa polos eosdem H, Θ (1.). Ducatur recta ΘH, circulis insistet ad angulos rectos, pervadetque et per centra eorum K, Λ, M, et per sphaerae centrum N (I, 10.). Iam quoniam perpendicula tria NK, NΛ, NM determinant distantiam circulorum a centro, aequalia erunt haec perpendicula (I, 6. *B.*), quod repugnat; igitur in sphaera aequalis et paralleli circuli non plures sunt quam bini.

Post propos. 6.

Corollarium. *Hinc perspicuum est, puncta contactuum* Γ, B *e diametro sphaerae esse opposita. Ostensum enim est,* ΓΔB *esse semicirculum maximum, ac propterea rectam ex puncto* Γ *ad* B *ductam diametrum sphaerae seu circuli maximi esse. (C.)*

Post propos. 7.

Prop. 7. a. Theor. (9.) *Circuli bini quilibet in sphaera aequidistantes, quos contingit circulus maximus, aequales sunt. (V.)*

F. 25. Sint duo sphaerae circuli ΓΔ, BH aequidistantes et circulus maximus ΓAB contingens illos in punctis Γ, B; dico, esse *circ.* ΓΔ = *circ.* BH.

Sunt enim circuli ΓΔ, BH circa polos eosdem (1.), qui sint E, Z. Per eos vero et per polos circuli ΓAB describatur circulus maximus ΓΔB, qui transibit per contactus Γ, B (4.); igitur semicirculus est *arc.* ΓΔB (I, 11.), atque adeo *arc.* EZ semicirculus est, quare *arc.* ΓB = *arc.* EZ, et demto communi arcu EB emergit *arc.* ΓE = *arc.* BZ; proinde aequales sunt chordae ex polis circulorum ΓΔ, BH, quippe quae chordae sint arcuum ΓE, BZ, ideoque circuli ΓΔ, BH aequales sunt (I, 21. b.). F. 25.

Post propos. 8.

Prop. 8. a. Theor. (11.) *Quilibet circulus maximus circulum aliquem sphaerae contingens, inclinatus est ad circulum maximum parallelum ei, qui contingitur. (V.)*

Sit AB circulus maximus contingens circulum AΓ in puncto A, et sit ΔE circulus maximus parallelus circulo AΓ; dico, *circ.* AB inclinatum esse ad *circ.* ΔE. F. 27. a

Etenim circuli AΓ, ΔE circa eosdem polos sunt (1.); et quoniam circuli AB, ΔE bisecant sese, *circ.* AB ad *circ.* ΔE erit aut perpendicularis aut inclinatus. Quodsi perpendicularis esset, pervaderet etiam per polos eius, ideoque per polos circuli AΓ (I, 13.); ergo *circ.* AB secaret *circ.* AΓ ad angulos rectos (I, 15.): at positus est contingens; itaque *circ.* AB ad *circ.* ΔE non est perpendicularis, sed inclinatus.

Corollarium. *Hinc consequitur conversa prop.* 8: *Quilibet circulus maximus duos contingens sphaerae circulos aequales, inclinatus est ad circulum maximum parallelum illis, qui continguntur. (V.)*

Post propos. 9.

Prop. 9. a. Theor. (13.) *Si duo sphaerae circuli secent sese utcunque, circulus alius, segmenta eorum bisecans, maximus est et per polos eorum transibit. (V.)*

Sint ZAEB, ZΔEΓ circuli duo secantes sese in punctis Z, E, sit autem AΓBΔ circulus alius, bisecans segmenta illorum quattuor, ita ut sit *arc.* ZA = *arc.* AE, *arc.* ZB = *arc.* BE, *arc.* ZΓ = *arc.* ΓE et *arc.* ZΔ = *arc.* ΔE; dico, *circ.* AΓBΔ maximum F. 28.

esse atque transiturum per polos utriusque circuli ZAEB, ZΓEΔ.

Namque si non transeat per polos eorum, describatur circulus maximus alius per polos, qui circulos hos secabit in punctis quattuor A, Γ, B, Δ (9.), ideoque secaret necessario circulum AΓBΔ in punctis quattuor. Hoc autem fieri non potest (*E.* III, 10.); igitur *circ.* AΓBΔ non potest non transire per polos reliquorum circulorum, transibit ergo, quare maximus est (I, 15. *a.*).

Prop. 9. b. Theor. *Si in sphaera duo quilibet circuli secent sese, maximus quidam circulus autem bisecet utriusque circuli segmentum unum, atque si arcus circuli maximi inter haec circulorum segmenta interceptus semicirculo non sit aequalis; circulus maximus transit per polos illorum, binaque segmenta reliqua secat bifariam. (M. prop.* 15.*)*

F. 28. a. Circuli ABΓΔ, EBZΔ sphaerae secent sese in punctis B, Δ, et maximus *circ.* AZΓE bisecet segmenta duo BAΔ, BEΔ in punctis A, E, et *arc.* AZΓE non sit aequalis semicirculo; dico, *circ.* AZΓE transire per polos circulorum ABΓΔ, EBZΔ, atque secare reliqua etiam segmenta BΓΔ, BZΔ in partes aequales.

Etenim si non transeat *circ.* AZΓE per polos circulorum illorum, describatur, si fieri potest, alius quidam circulus maximus AHE per polos, qui segmenta bisecabit necessario, ideoque transibit per puncta A, E (9.). Hinc circuli maximi AZΓE, AHE bisecant sese in punctis A, E (I, 11.), quare semicirculus est AZΓE, quod repugnat proposito. Quapropter *circ.* AZΓE transit per polos circulorum ABΓΔ, EBZΔ, eoque bisecat segmenta eorum omnia (*a*).

Ad propos. 11.

F. 30. Perpendicula ex punctis H, Θ ad plana circulorum ABΓ, ΔEZ in ipsas diametros intra circulos cadere ponuntur Theo-

a) Si non positum esset, *circ.* AZΓE semicirculo non esse aequalem, non constaret theorema, propterea quod per puncta A, E circuli maximi numero infiniti possunt describi, quorum unus tantum transit per polos circulorum sese secantium.

dosio. Sed quum fieri possit, ut cadant aut in puncta diametros terminantia, aut extra circulos in diametros productas, nempe si semicirculis maiora sint segmenta ΑΗΓ, ΔΘΖ; Voegelini Arabs hos etiam casus respicit et absolvit, quem sequuti sunt Clavius, Barrovius et Dechalesius.

1) Perpendiculum a puncto Η demissum cadat in punctum Α et perpendiculum a Θ in Δ; erit ΗΑ = ΘΔ (*E.* III, 29.), et ductis ΑΒ, ΔΕ anguli ΗΑΒ, ΘΔΕ recti sunt, atque quum sit ΗΒ = ΘΕ ex constructione, erit F. 30. a.

$$\mathrm{HA}^2 + \mathrm{AB}^2 = \Theta\Delta^2 + \Delta\mathrm{E}^2,$$

et demtis $\mathrm{HA}^2 = \Theta\Delta^2$

consequitur $\mathrm{AB}^2 = \Delta\mathrm{E}^2$, eoque ΑΒ = ΔΕ,

igitur *arc.* ΑΒ = *arc.* ΔΕ.

2) Perpendicula vero a punctis Η et Θ demissa cadant in diametros productas, ut in puncta Κ, Λ; iam est ΓΑΗ = ΖΔΘ, quoniam *arc.* ΓΗ = *arc.* ΖΘ. Igitur est ΑΗΚ = ΔΘΛ, quum anguli ΓΑΗ, ΖΔΘ externi sunt triangulorum ΑΚΗ, ΔΛΘ, anguli autem ΗΚΑ, ΘΛΔ recti. Atque quum sit ΑΗ = ΔΘ, consequens est, esse *triang.* ΑΗΚ ≅ *triang.* ΔΘΛ, quare et ΗΚ = ΘΛ est et ΑΚ = ΔΛ, ideoque ΚΜ = ΛΝ. Atqui est ΗΒ = ΘΕ ex hypothesi, ergo ΚΒ = ΛΕ, igitur *triang.* ΒΚΜ ≅ *triang.* ΕΛΝ, unde ΒΜΚ = ΕΝΛ, quocirca *arc.* ΑΒ = *arc.* ΔΕ. F. 30. b.

Ad propos. 15.

Tertium casum, quo *arc.* ΒΓ quadrante maior ponitur, ita fere Voegelini Arabs absolvit.

Sit *arc.* ΒΓ quadrante maior; dematur *arc.* ΓΘ ita ut reliquus *arc.* ΒΘ quadranti aequalis sit, atque fiat *arc.* ΓΘ = *arc.* ΕΚ = *arc.* ΗΛ, erit *arc.* ΜΚ = *arc.* ΝΛ = *arc.* ΒΘ, quare *arc.* ΝΛ itidem est quadrans circuli. Ductis deinde rectis ΕΘ, ΓΛ erit ΕΘ = ΓΛ (12.); nam circuli ΔΕ, ΔΓ, ΔΗ ad rectos angulos insistunt circulo ΕΓΗ parallelo *circ.* ΑΒ, et aequales arcus ΓΘ, ΗΛ, ΕΚ singuli minores sunt, quam complementa sua, atque est *arc.* ΓΕ = *arc.* ΓΗ; igitur est etiam *arc.* ΕΘ = *arc.* ΛΓ. Sed punctum Θ polus est circuli ΕΒΗ, igitur tum *arc.* ΕΘ, tum *arc.* ΓΛ circuli quadrantes sunt et proin polo quidem Λ, intervallo autem ΛΓ descriptus circulus trans- F. 34. a.

ibit etiam per punctum N. Simili modo ostendetur, fore ut polo K, intervallo autem ΚΓ descriptus circulus pervadat etiam per punctum M.

Post propos. 20.

F. 42. F. 43. Corollarium. *Hinc est arc.* ΑΘΚΒ *maior pars circuli sui paralleli* AB, *quam est arc.* ΓΔ *circuli sui paralleli* ΓΔ, *quandoquidem arc.* ΘΚ *tanta pars est sui circuli* AB, *quanta est arc.* ΓΔ *circuli sui* ΓΔ *(Clav.)*.

Post. propos. 21.

Corollarium. *Si circulorum maximorum ad alios inclinatorum poli aequaliter distent a polis maximorum, ad quos inclinantur, similes sunt inclinationes (*I, *Def.* 6.*); cuius vero vicinior est polus polo eius circuli, ad quem inclinantur, maiorem inclinationem habet (Clav.).*

F. 44. Sint enim Π, Ρ (*a*) poli circulorum maximorum ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ceteraque omnia, ut in ipsa propositione. Quodsi sit *arc.* ΠΜ = *arc.* ΡΝ, sequitur *arc.* ΜΓ = *arc.* ΝΗ, ideoque poli Π, Ρ aequaliter distant a planis circulorum ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, quare circuli ΒΚΔ, ΖΛΘ similiter inclinati sunt ad circulos ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ.

Verum si sit *arc.* ΠΜ < *arc.* ΡΝ, sequitur *arc.* ΜΓ > *arc.* ΝΗ, igitur punctum M sublimius est, quam N, ideoque *circ.* ΒΚΔ ad *circ.* ΑΒΓΔ magis est inclinatus, quam *circ.* ΖΛΘ ad *circ.* ΕΖΗΘ.

Prop. 21. a. Theor. *In sphaeris aequalibus si circuli maximi ad circulos maximos similiter inclinentur, poli illorum a planis horum circulorum aequaliter distabunt; illius vero, qui magis inclinatur, sublimior erit polus. Item poli circulorum, qui similiter inclinantur, a polis circulorum, ad quos inclinantur, aequaliter distabunt, sed polus circuli illius, qui magis inclinatur, polo circuli, ad quem inclinatur, propinquior erit (Clav.).*

F. 44. Nam si maximi circuli ΒΚΔ, ΖΛΘ similiter sint inclinati ad *circ.* ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, est ΑΞΚ = ΕΟΛ, igitur *arc.* ΑΚ

a) Elementa Π, Ρ figurae adpinxi, ut eadem inservire possit huic corollario.

$=$ *arc.* EΛ; additis igitur quadrantibus KM, ΛN erit *arc.* ΛN $=$ *arc.* EN, ac propterea *arc.* MΓ $=$ *arc.* NH.

Sed si *circ.* BKΔ ad *circ.* ΑΒΓΔ magis sit inclinatus, quam *circ.* ZΛΘ ad *circ.* EZHΘ, erit *arc.* AK $<$ *arc.* EΛ, ergo additis quadrantibus KM, ΛN erit *arc.* AM $<$ *arc.* EN, ac proinde *arc.* MΓ $>$ *arc.* NH.

Rursum si circuli similiter inclinentur, erit *arc.* MΓ $=$ *arc.* NH, ut proxime ostendimus; quum ergo quadrantes sint *arc.* ΠΓ, PH, erit *arc.* ΠM $=$ *arc.* PN.

Denique si *circ.* BKΔ magis sit inclinatus ad *circ.* ΑΒΓΔ, quam *circ.* ZΛΘ ad *circ.* EZHΘ, erit *arc.* MΓ $>$ *arc.* NH, quare *arc.* ΠM $<$ *arc.* PN.

Corollarium. *Si ex alterutra intersectione circulorum maximorum duorum quasi polo describatur circulus maximus, arcus eius inter illos circulos interceptus mensura erit inclinationis circulorum amborum (Dechales.).*

I. e. Inclinationis circulorum BKΔ, ΑΒΓΔ mensura est *arc.* AK. F. 44.

Prop. 21. b. Theor. *Si circuli maximi eundem parallelum contingant, similiter inclinati sunt ad maximum parallelorum; sed qui maiorem parallelum contingit, magis inclinatus est ad maximum parallelorum. E converso si circuli maximi similiter inclinati sint ad maximum parallelorum, eundem parallelum contingunt, sed qui magis inclinatus est, maiorem parallelum contingit (M. prop. 26.)*

1) Circuli maximi AB, ΓB contingant uterque circulum parallelum AΓ in punctis A, Γ, sitque *circ.* ΔE maximus parallelorum; dico, circulos AB, ΓB similiter inclinatos esse ad *circ.* ΔE. F. 44 a.

Etenim punctum Z sit polus circuli ΔE et describantur circuli maximi ZAΔ, ZΓE per puncta Z, A et Z, Γ; transibunt per polos circulorum maximorum AB, ΓB (5) eosque secabunt ad angulos rectos (I, 15.). Hinc arcus AZ, ΓZ erunt altitudines poli Z supra circulos AB, ΓB. Sed quoniam punctum Z polus est *circ.* AΓ, erit *arc.* AZ $=$ *arc.* ΓZ, igitur polus circuli ΔE eadem altitudine est supra *circ.* AB, ac supra *circ.* ΓB, ideoque *circ.* ΔE ad *circ.* AB et ad *circ.* ΓB similiter est inclinatus (21.).

2) Deinde vero circulus maximus HΘ contingat circulum parallelum maiorem IH; dico, *circ.* HΘ ad *circ.* ΔE magis esse inclinatum, quam *circ.* AB.

Descripto enim per puncta Z, H circulo maximo ZHE, ut prius erit *arc.* ZH altitudo poli Z supra *circ.* HΘ. Sed est *arc.* ZH > *arc.* ZA, ergo sublimior est polus *circ.* ΔE supra *circ.* HΘ, quam supra *circ.* AB, et proinde *circ.* ΔE magis est inclinatus ad *circ.* HΘ, quam ad *circ.* AB (21).

3) Iam rursus circuli maximi AB, ΓB similiter inclinati sint ad *circ.* ΔE; dico, contingere eos circulum parallelum eundem.

Describantur enim per punctum Z et per polos circulorum AB, ΓB circuli maximi ZAΔ, ZΓE, qui circulos AB, ΓB in punctis A, Γ secare ponantur. Sed quum hi circuli secentur ad perpendiculum (I, 15.), arcus AZ, ΓZ altitudines erunt poli Z supra circulos AB, ΓB. Similiter autem inclinati sunt circuli ad *circ.* ΔE, igitur est *arc.* AZ = *arc.* ZΓ (21. *a.*). Descriptus itaque circulus maximus AΓ polo quidem Z, intervallo autem ZA sive ZΓ continget circulos AB, ΓB (3.).

4) Denique *circ.* HΘ magis inclinatus sit ad *circ.* ΔE, quam *circ.* AB; dico, illum contingere circulum parallelum maiorem.

Describatur enim iterum circulus maximus ZHE per punctum Z et per polum circuli HΘ, qui secabit *circ.* HΘ ad perpendiculum in puncto H; iam erit *arc.* ZH altitudo poli Z supra *circ.* HΘ. Sed est *arc.* ZH > *arc.* ZA (21. *a.*), quare circulus maximus polo quidem Z, intervallo autem ZH descriptus maior erit, quam circulus maximus polo quidem eodem, intervallo vero ZA descriptus; qui tamen circuli descripti AΓ, IH contingent circulos maximos AB, HΘ (3.).

Prop. 21. *c.* Theor. *Si circuli maximi similiter inclinati sint ad maximum parallelorum, polos habent in circumducta eiusdem paralleli. Et si circulorum maximorum poli sint in eiusdem paralleli circumducta, similiter inclinati sunt ad maximum parallelorum (M. prop. 27.)*

F. 44. b. 1) Circuli maximi AB, ΓΔ, quorum poli sint puncta E, Z, inclinati sint similiter ad parallelorum maximum *circ.* ΔB; dico, polos E, Z esse in uno eodemque parallelo.

Descriptis enim per H, polum parallelorum, et per E, Z, polos circulorum AB, ΓΔ, maximis circulis EH, ZH, qui circulis AB, ΓΔ erunt ad angulos rectos, arcus EH, ZH distantiae erunt polorum E, Z a polo H. Sed est *arc.* EH = *arc.* ZH (21. *a.*); quodsi polo quidem H, intervallo autem sive HE sive HZ circulus describatur, parallelus erit circulo ΔB (2.), in quo quidem parallelo siti sunt poli circulorum AB, ΓΔ.

2) Sed iam circuli AB, ΓΔ polos habeant in circulo E, Z; dico, similiter inclinari eos ad parallelorum maximum ΔB.

Quoniam enim punctum H polus est *circ.* EZ, erit *arc.* EH = *arc.* ZH, atque quoniam hi arcus distantiae sunt polorum E, Z a polo H, similiter erunt inclinati circuli AB, ΓΔ ad *circ.* ΔB, parallelorum maximum (21. *Coroll.*),

Ad propos. 22.

Et longior est huius propositionis demonstratio, et non satis firma ratione constare videtur (vid. not. *d.* ad prop. ipsam). Hinc Arabem sequuti sunt Clavius, Barrovius et Dechalesius, alia tria theoremata inserentes, quorum auxilio et facilior sit demonstratio et magis dilucida. Sunt autem haec:

Prop. 22. a. Theor. (25.). *Si in diametro circulo constituatur ad angulos rectos segmentum circuli, dividatur autem arcus eius in partes duas inaequales, et ex puncto sectionis rectae lineae quotcunque ducantur ad ambitum circuli primum positi; minorem arcum subtendens recta minima, sed maiorem subtendens maxima erit omnium, reliquarum vero quaevis remotior extremitati minoris maior erit, propinquior autem minor. Binae denique utrimque aequaliter distantes erunt aequales (V.).* (*a.*)

In diametro circuli ABE ad angulos rectos constitutum sit circuli segmentum AZΔ, atque ita divisus sit arcus eius in puncto Z, ut sit *arc.* AZ < *arc.* ΔZ, ductaeque sint rectae ZA, ZB, ZΓ, ZΔ, ZE, et sit *arc.* ΔΓ = *arc.* ΔE; dico, rectarum harum omnium minimam esse ZA, maximam ZΔ, deinde ZΓ > ZB atque ZE = ZΓ. F. 44. c.

a) Est autem hocce theorema pars altera propositionis 1, libri III., magis modo universale.

Demittatur enim ex puncto Z in planum circuli ABE perpendiculum ZH, quod cadet in sectionem communem AΔ, punctumque H erit aut inter A, Δ (id quod necessario accidet, quando segmentum AZΔ semicirculo maius non est, quamvis accidere possit in segmento maiore), aut ipsum A, aut extra circulum in dimetiente ΔA producta (utrumque accidet solummodo in segmento, quod semicirculo maius est); sed punctum H nunquam erit centrum circuli ABE. Iam iungantur HB, HΓ, HE, rectos angulos constituent cum recta ZH in puncto H. Atqui in tribus huc pertinentibus formis recta HΔ maxima est inter omnes ex puncto H ductas ad ambitum circuli ABE, recta vero HA in forma prima et tertia minima est, atque $H\Gamma > HB$ et $H\Gamma = HE$ (*E.* III, 7. 8. 15.); addito ergo quadrato ZH^2 quadratis singulis AH^2, ΔH^2, ΓH^2, BH^2, EH^2, simul sumta quadrata erunt aequalia quadratis singulis AZ^2, $Z\Delta^2$, $Z\Gamma^2$, ZB^2, ZE^2, unde sequitur:

1) Esse AZ^2 minus, quam reliquorum quadratorum unumquodque, quare AZ recta minor est, quam quaevis rectarum ZΔ, ZΓ, ZB, ZE;

2) esse $Z\Delta^2$ maius, quam reliquorum quadratorum unumquodque, ac propterea recta ZΔ maior quavis rectarum ZA, ZΓ, ZB, ZE;

3) esse $Z\Gamma^2 > ZB^2$, eoque $Z\Gamma > ZB$;

4) esse $Z\Gamma^2 = ZE^2$, unde $Z\Gamma = ZE$;

quare constat propositum.

Definitio. *Si ex puncto in superficie sphaerae ubicunque sumto usque ad ambitum circuli cuiusdam sphaerae describatur arcus circuli, aut continget ambitum illum, aut bis secabit. Quodsi hic arcus respiciatur usque ad primam sectionem, punctum illud intra circulum sphaerae situm esse dicitur; sed si arcus intelligatur productus ad sectionem alteram, punctum illud extra circulum situm esse dicitur (Voeg. post pr. 28.).*

Prop. 22. b. Theor. (28.) *Si in superficie sphaerae intra circuli cuiusvis ambitum sumatur punctum aliquod praeter polum, et ducantur ab eo ad ipsam ambientem arcus quotcunque circuli maximi (semicirculo minores — Clav.), omnium erit maximus, qui per polum ducitur, minimus autem, qui adiacet ei. Sed reliquorum maximo propinquior remotiore semper maior est, bini vero*

arcus ab eodem maximo (vel minimo — Clav.) aequaliter distantes utrimque aequales sunt (V.).

Sit ABH circulus sphaerae cum polo Δ, et sumatur quasi intra circulum punctum aliquod E praeter polum Δ, ac describantur ab illo puncto ad circumductam circuli ABH quotcunque arcus circulorum maximorum EB, EZ, EΓ, EA, EH. Transeat autem *arc.* EΓ per polum Δ, et *arc.* EA sit adiacens ei, ita ut simul sumti constituant arcum AEΓ; atque sit *arc.* EZ propinquior arcui EΓ, quam arcus EB, denique uterque arcus EB, EH aequaliter distent ab arcu EΓ (omnes autem hi arcus semicirculo sint minores, quod tum demum erit, quum sese mutuo non intersecant in alio puncto, quam in Z (I, 11). — Clav.); dico, *arc.* EΓ esse maximum, *arc.* EA vero minimum ex omnibus, atque esse *arc.* EB > *arc.* EZ et *arc.* EB = *arc.* EH. F. 44. d.

Nam quoniam *arc.* AEΓ *circ.* ABH et ad angulos rectos secat et bifariam, recta iungens puncta A, Γ dimetiens circuli huius erit, in qua constitutum est ad angulos rectos circuli segmentum AEΓ, arcus autem AEΓ non bifariam divisus est in puncto E, ita ut sit *arc.* EΓ > *arc.* EA; quocirca omnium a puncto E ad ambitum circuli ABH ductarum recta EA maxima erit, sed EB > EZ et EB = EH (22. *a.*). Quoniam igitur arcus dicti omnes semicirculo sunt minores, conficitur illico, esse *arc.* EΓ maximum, sed *arc.* EA minimum, *arc.* EB > *arc.* EZ et *arc.* EB = *arc.* EH (*E.* III, 28.).

Prop. 22. c. Theor. (29.) *Si in sphaerae superficie extra circuitum circuli alicuius punctum sumatur utcunque praeter polum, et ducantur ab eo ad ambitum ipsum arcus quotcunque circulorum maximorum circumductam illum secantes (minores tamen semicirculo — Clav.); omnium erit maximus, qui per polos pervadit, cui arcui propinquiores remotioribus erunt maiores. Partium vero arcuum extra illum circulum sitarum ea erit minima, quae pars est arcus per polum descripti, et reliquarum huic propinquiores remotioribus semper erunt minores; binae denique a parte minima seu maxima aequaliter utrimque distantes erunt aequales.* (*V.*)

Sit ABΓ circulus sphaerae cum polis Δ, E. Sumatur in superficie sphaerae quasi extra circulum sphaerae punctum aliquod ubicunque libuit praeter polos, et ducantur ab eo ad F. 44. e.

ambitum circuli illius quotcunque circulorum maximorum arcus ZΓA, ZΛB, ZKH, ZMΘ, ita ut *arc.* ZΔA transeat per polum Δ, et sit arcui ZΓA propinquior arcus ZΛB quam arcus ZKH, sed arcus ZKH, ZMΘ aequaliter distent utrimque ab *arc.* ZΓA (atque singuli arcus minores sint semicirculo, quod tum demum accidet, quum intersecant sese non nisi in puncto Z (1, 11.) — Clav.); dico, *arc.* ZΓA omnium esse maximum, sed *arc.* ZB > *arc.* ZH et *arc.* ZH = *arc.* ZΘ; dico deinde, partium horum arcuum extra circulum ABΓ positarum arcum ZΓ esse minimum, *arc.* ZΛ < *arc.* ZK et *arc.* ZK = *arc.* ZM.

Etenim quia maximus circulus ZΓA circulum ABΓ secat et ad angulos rectos et bifariam, recta iungens puncta A, Γ diameter est *circ.* ABΓ, atque insistit ei segmentum AEΓ ad perpendiculum, cuius circumducta dividitur in puncto Z non bifariam, ita ut minor arcus sit ZΓ. Omnium igitur a puncto Z ad ambitum *circ.* ABΓ ductarum recta ZA maxima, ZΓ autem minima est, et ZB > ZH atque ZH = ZΘ; deinde ZΛ < ZK et ZK = ZM (22. *a.*); unde conficitur demonstratio similiter atque in prop. 22. b.

Horum theorematum auxilio propositio 22 ita ostenditur Voegelino:

F. 45. Circulus maximus ABΓ contingat in puncto A sphaerae circulum AΔ, cuius polus sit punctum Λ, secet vero alium circulum EZHΘ, parallelum illi et situm in eodem hemisphaerio, punctumque K, hoc est polus circuli ABΓ, sit inter circulos parallelos AΔ, EZHΘ. Describantur circuli maximi MNΞ, BZΓ, OΠP, ΣT, ΘΥ, contingentes circulum parallelum maiorem in punctis N, Z, Π, T, Θ, atque segmentum minus circuli EZHΘ bifariam secetur in puncto Θ, segmentum vero maius in puncto Z, et sit *arc.* ZN = *arc.* ZΠ; dico, circulos hos inclinatos esse omnes ad *circ.* EZHΘ, et humillime quidem *circ.* ΘΥ, rectissimum autem esse *circ.* BZΓ, deinde circulos MNΞ, OΠP similiter, sed *circ.* ΣT magis inclinari quam *circ.* OΠP; itemque dico, dictorum polos circulorum positos esse in uno eodemque circulo, parallelo quidem circulo AB, sed minore.

Describatur enim per polum K et per contactum A circulus maximus AK, qui pervadet per polum Λ circulorum parallelorum AΔ, EZHΘ (5.), ideoque bisecabit segmenta EΘH,

EZH, i. e. per puncta Θ, Z transibit (9.). Atqui est *arc.* KA quadrans, et polus *circ.* BZΓ est in *circ.* ZKA (5.), sit in puncto Φ, ita ut *arc.* ZΦ quadrans sit; itidem est polus *circ.* MNΞ in quodam circulo maximo NΛΩ, transeunte per puncta Λ, N, uti in Ω, ita ut *arc.* NΛΩ etiam sit quadrans; atque est *arc.* ΛZ = *arc.* ΛN, quare *arc.* ΛΦ = *arc.* ΛΩ; ergo si polo quidem Λ, intervallo autem ΛΦ circulus describatur, pervadet etiam per punctum Ω. Similiter iam ostenditur, polos etiam circulorum reliquorum OΠP etc. in eodem sitos esse circulo ΦΩΨX, parallelo circulo AΔ sed minore.

Rursus quoniam *arc.* KΦ quadrante minor est, ideoque punctum K non est polus alter circuli ΦΩX, ex omnibus igitur a puncto K ad puncta Φ, Ω etc. ductis circulorum maximorum arcubus erit maximus *arc.* KΦ et minimus *arc.* Kτ, atque *arc.* KΩ = *arc.* KX et *arc.* KX > *arc.* KΨ (22. *c.*); itaque *circ.* BZΓ rectissimus et *circ.* ΘΥ humillimus est, sed circuli MNΞ, OΠP similiter inclinantur et *circ.* OΠP magis quam *circ.* ΣT (21. *Coroll.*)

Liber tertius.

Post propos. 8.

Quemadmodum Theodosius in propositione 9 de arcubus non continentibus ostendit idem, quod in prop. 6 docuit de continentibus; ita Arabs Voegelini tria exhibet theoremata, quibus eadem demonstrantur circa non continentes arcus, quae Theodosius ostendit circa continentes in propp. 5, 7, 8. Quorum quia theorema primum hoc loco proposuit, reliqua autem post prop. 9. nostram, ordinem non immutandum esse censuimus.

Prop. 8. a. Theor. (7.) *Si polus parallelorum sit in ambitu circuli maximi, quem duo circuli maximi secent ad angulos rectos, quorum alter sit unus parallelorum, alter vero obliquus ad parallelos, et si huius obliqui circuli sumantur arcus aequales non quidem continentes sed ad easdem partes maximi parallelorum, atque ducantur circuli paralleli per arcuum illorum terminos: circuli primum positi arcus inaequales intercipient inter se, semperque is, qui propior est maximo parallelorum, maior erit remotiore. (V. et Clav.)*

F. 56. b. Circulus maximus ΑΒΓ inclinatus sit ad circulum maximum ΔΒΕ et circulus maximus ΑΔΓ transeat per polos utriusque, erit *arc.* ΑΒ quadrans. In hoc autem arcu denotentur arcus ΖΗ, ΘΚ aequales non continentes ad partes easdem maximi parallelorum ΔΕ, et describantur per arcuum terminos circuli paralleli ΛΖΜ, ΝΗΠ, ΞΘΟ, ΡΚΙ; dico, esse *arc.* ΛΝ $>$ *arc.* ΞΡ.

1) Arcus $H\Theta$ interceptus inter utrumque utrique aut commensurabilis est, aut non commensurabilis. Sit primum commensurabilis utrique. Inveniatur mensura communis arcus $H\Theta$ et alterutrius arcuum ZH, ΘK (*E.* X, 3.) ac dividantur hi arcus tres in partes suas mensurae aequales. Sit autem ipse *arc.* $H\Theta$ mensura communis ac metiatur utrumque arcum per numerum 2. Iam dividatur bifariam *arc.* ZH in T et *arc.* ΘK in X, ut sit *arc.* $ZT =$ *arc.* $TH =$ *arc.* $H\Theta =$ *arc.* $\Theta X =$ *arc.* XK, et describantur circuli ΥT, ΩX paralleli circulo ΔBE; erit *arc.* $\Lambda\Upsilon$ $>$ *arc.* ΥN, *arc.* $\Upsilon N >$ *arc.* $N\Xi$ et *arc.* $N\Xi >$ *arc.* $\Xi\Omega$ (5.), igitur est *arc.* $\Lambda\Upsilon >$ *arc.* $\Xi\Omega$. Haud aliter est *arc.* $\Upsilon N >$ *arc.* ΩP ideoque *arc.* $\Lambda\Upsilon +$ *arc.* $\Upsilon N >$ *arc.* $\Xi\Omega +$ *arc.* ΩP, i. e. *arc.* ΛN $>$ *arc.* ΞP.

2) Rursum non commensurabilis sit arcus $H\Theta$ utrique arcuum ZH, ΘK; attamen dico, esse *arc.* $\Lambda N >$ *arc.* ΞP. Etenim si non sit *arc.* $\Lambda N >$ *arc.* ΞP, erit aut *arc.* $\Lambda N =$ *arc.* ΞP, aut *arc.* $\Lambda N <$ *arc.* ΞP. F. 56. c.

Sit primum *arc.* $\Lambda N <$ *arc.* ΞP et ab *arc.* ΞP auferatur *arc.* $\Xi\Sigma =$ *arc.* ΛN ac describatur *circ.* ΣT parallelus circulo ΔBE. Deinde inveniatur quidam arcus ΘX maior quam *arc.* ΘT, minor autem quam *arc.* ΘK et commensurabilis arcui $H\Theta$ (9., *not. b.*). Fiat porro *arc.* $H\Phi =$ *arc.* ΘX, erit *arc.* $H\Phi$ $<$ *arc.* HZ, eo quod *arc.* $HZ =$ *arc.* ΘK est. Iam describantur circuli ΩX, $\Upsilon\Phi$ paralleli circulo ΔBE, erit ex iis, quae quum maxime ostensa sunt, *arc.* $\Upsilon N >$ *arc.* $\Xi\Omega$, magis itaque *arc.* ΛN $>$ *arc.* $\Xi\Sigma$, quod repugnat, positi enim sunt aequales; ideoque non est *arc.* $\Xi P >$ *arc.* ΛN.

3) Rursus sit *arc.* $\Xi P =$ *arc.* ΛN et secetur uterque arcus ZH, ΘK in partes aequales in punctis Σ, T, ac per haec puncta describantur circuli paralleli $X\Sigma$, ΩT, erit *arc.* $\Lambda X >$ *arc.* XN et *arc.* $\Xi\Omega >$ *arc.* ΩP, igitur *arc.* $\Lambda N > 2$ *arc.* XN et *arc.* ΞP < 2 *arc.* $\Xi\Omega$. Verum est *arc.* $\Lambda N =$ *arc.* ΞP, ergo *arc.* ΛN < 2 *arc.* $\Xi\Omega$, ideoque est F. 56. d.

$$arc.\ \Lambda N : arc.\ XN > arc.\ \Lambda N : arc.\ \Xi\Omega$$

quare *arc.* $XN <$ *arc.* $\Xi\Omega$, quod repugnat proxime demonstratis. Nam quoniam est *arc.* $\Sigma H =$ *arc.* ΘT, et non commen-

surabilis arcus HΘ utrique arcuum ΣH, ΘT, non est *arc.* XN $<$ *arc.* ΞΩ. Proin est *arc.* ΛN $>$ *arc.* ΞP (*a*).

Post propos. 9.

Prop. 9. a. Theor. (9.). *Si sphaerae circulus maximus contingat circulos duos parallelos, alius autem circulus maximus illi obliquus contingat circulos duos parallelos dictis maiores, sintque contactus eorum in circulo maximo primum posito; et si circuli obliqui sumantur arcus duo aequales non continentes quidem, sed positi ad partes easdem maximi parallelorum: circuli quattuor paralleli per terminos sublatorum arcuum amborum descripti intercipient arcus inaequales circuli maximi primum positi, maior autem arcus is erit, qui propior est maximo parallelorum. (V.)*

Quemadmodum prop. 8. a. demonstrata est per prop. 5., hocce theorema demonstrari potest per prop. 7.

Prop. 9. b. Theor. (10.). *Si sphaerae circulus maximus contingat circulos parallelos duos, alius autem circulus maximus illi obliquus circulos duos parallelos contingat dictis maiores, sintque contactus eorum in circulo maximo primum posito; et si circuli obliqui arcus sumantur duo aequales non continentes ad partes easdem parallelorum maximi: quattuor circuli maximi contingentes circulos parallelos illos, quos maximus primum positus contingit, descripti per terminos sublatorum arcuum amborum, intercipient arcus inaequales maximi parallelorum, quorum, qui propinquior est circulo maximo primum posito, maior erit.* (*V.*)

Demonstratur theorema auxilio prop. 8. eodem modo, quo prop. 9. demonstrata est per prop. 6.

Post propos. 10.

Corollarium. *Hinc manifestum est, esse*

arc. BΘ : *arc.* ΔZ $>$ *arc.*ΘK : *arc.* ZH. *(Clav.)*

a) Idem theorema est apud Pappum (Math. coll. VI. 6.) duabus demonstrationibus instructum, quarum altera non diversa est ab illa Arabis nostri, nisi quod Pappus secundam demonstrationis partem vitiose conficit, tertiam mira brevitate abrumpit. Vitium Pappi Commandinum, qui 1558 Pappum latine edidit, fugisse videtur, quum in tertia demonstrationis parte nonnulla desiderari vere monuerit.

Post propos. 11.

Prop. 11. a. Theor. *Iisdem positis diameter sphaerae ad diametrum circuli eius paralleli, qui descriptus est per punctum sectionis circuli obliqui atque maximi per polos descripti, rationem habet minorem, quam arcus circuli maximi parallelorum interceptus inter circulum maximum primo positum atque illum, qui per polos pervadit, ad arcum circuli obliqui inter eosdem circulos interceptum. (M. prop.* 13.*)*

Constructis enim iisdem, ut in prop. 11., dico, fore, F. 63.
ut sit

$$\textit{diam. sphaerae} : \textit{diam. circ.}\ NH\Xi < \textit{arc.}\ B\Theta : \textit{arc.}\ \Delta H.$$

Sint enim rectae $N\Xi$, $B\Gamma$ intersectiones circulorum $NH\Xi$, $B\Theta\Gamma$ cum circulo ABK, manifesto erunt diametri illorum circulorum, quippe quum *circ.* ABK transeat per polos eorum, ac propterea $B\Gamma$ quoque diameter erit sphaerae; et *circ.* ΔHZ transibit per polos *circ.* ABK, quoniam *circ.* ΔHZ ad perpendiculum est circulo ABK. Ita quoque *circ.* $B\Theta\Gamma$ transibit per polos *circ.* ABK, quare punctum intersectionis E polus erit *circ.* ABK, ac propterea segmentum ΔHZ circulo ABK ad angulos rectos positum dividitur in partes inaequales in puncto H, ita ut *arc.* ΔH sit arcus minor. Recta igitur ΔH minor erit quam recta NH (II, 22. *a.*). Ergo quoniam est *circ.* $NH\Xi <$ *circ.* ΔHZ, erit *arc.* $NH >$ *arc.* ΔH (6. *not. a. pag.* 146.), igitur est

$$\textit{arc.}\ B\Theta : \textit{arc.}\ NH < \textit{arc.}\ B\Theta : \textit{arc.}\ \Delta H,$$

sed est

$$\textit{arc.}\ B\Theta : \textit{arc.}\ NH = \textit{amb. circ.}\ B\Theta\Gamma : \textit{amb. circ.}\ NH\Xi,$$

quia inaequalium circulorum arcus sunt ut ipsi ambitus circulorum. Hinc est

$$\textit{amb. circ.}\ B\Theta\Gamma : \textit{amb. circ.}\ NH\Xi < \textit{arc.}\ B\Theta : \textit{arc.}\ \Delta H.$$

Verum ambitus circulorum sunt ut dimetientes, ergo

$$B\Gamma : N\Xi < \textit{arc.}\ B\Theta : \textit{arc.}\ \Delta H.$$

Corollarium. *Iisdem positis prodit*

$$\textit{arc.}\ B\Theta : \textit{arc.}\ \Delta H > \textit{sin. tot.} : \textit{sin.}\ AH,$$

et

$$\textit{arc.}\ B\Theta : \textit{arc.}\ \Delta H < \textit{sin. tot.} : \textit{sin.}\ A\Delta \quad (\textit{Clav.})$$

Etenim quoniam est

$$\textit{arc.}\ B\Theta : \textit{arc.}\ \Delta H > B\Gamma : N\Xi,$$

sequitur

$$arc.\, B\Theta : arc.\, \Delta H > BO : N\Pi;$$

sed recta BO est sphaerae radius sive *sin. tot.*, et est NΠ = *sin.* AN = *sin.* AH, quum sit *arc.* AN = *arc.* AH. Est ergo *arc.* BΘ : *arc.* ΔH > *sin. tot.* : *sin.* AH.

Rursus quia est

$$arc.\, B\Theta : arc.\, \Delta H < B\Gamma : \Delta M \quad (11.)$$

et

$$B\Gamma : \Delta M = BO : \Delta\Sigma = sin.\, tot. : sin.\, A\Delta,$$

consequens est, esse

$$arc.\, B\Theta : arc.\, \Delta H < sin.\, tot. : sin.\, A\Delta.$$

Ad propos. 12.

F. 46. a. Quod Theodosius de diametro dupla sphaerae ostendit in hac propositione, Clavius de simplici sphaerae diametro demonstrare voluit. Scilicet dicit, esse

$$diam.\, sph. : diam\, circ.\, EH > arc.\, \Psi\Phi : arc.\, \Theta K$$

atque hac ratione ingreditur demonstrationem.

Per polum A et per puncta E, Θ, K describantur circuli maximi AM, AN, AΞ, per punctum K autem circulus parallelus KP, qui secet *circ.* IΨ in puncto Ω. Iam quia se habet

$$diam.\, sph. : diam.\, circ.\, EH > arc.\, MN : arc.\, E\Theta \quad (11.)$$

et

$$arc.\, MN : arc.\, E\Theta > arc.\, N\Xi : arc.\, \Theta K \quad (10.\, Cor.)$$

consequitur, esse

$$diam.\, sph. : diam.\, circ.\, EH > arc.\, N\Xi : arc.\, \Theta K.$$

Et quia

$$arc.\, \Omega K \backsim arc.\, \Psi\Phi \quad (II,\, 13.),$$

item

$$arc.\, PK \backsim arc.\, N\Xi \quad (II,\, 10.),$$

atque

$$arc.\, \Omega K < arc.\, PK,$$

erit

$$arc.\, \Psi\Phi < arc.\, N\Xi,$$

ergo

$$arc.\, \Psi\Phi : arc.\, \Theta K < arc.\, N\Xi : arc.\, \Theta K,$$

multo magis igitur

$$diam.\ sph. : diam.\ circ.\ EH > arc.\ \Psi\Phi : arc.\ \Theta K.$$

Ita Clavius et post eum Henrionius, Barrovius, Dechalesius, Huntius, sed demonstratio non valet in universum. Descripto enim per punctum Θ circulo maximo altero AB, *circ.* IT contingente in puncto A (II, 15.) atque descripto per punctum K circulo maximo altero ΓΔ, circulum IT contingente in puncto Γ, vel sic oportebat ostendere Clavium, esse

$$diam.\ sph. : diam.\ circ.\ EH > arc.\ B\Delta : arc.\ \Theta K.$$

Facile autem eodem modo ut proxime ostenditur, esse

$$diam.\ sph. : diam.\ circ.\ EH > arc.\ N\Xi : arc.\ \Theta K,$$

atque est

$$arc.\ \Sigma K \backsim arc.\ B\Delta$$

et

$$arc.\ PK \backsim arc.\ N\Xi;$$

sed nunc est

$$arc.\ \Sigma K > arc.\ PK,$$

ergo et

$$arc.\ B\Delta > arc.\ N\Xi,$$

ideoque

$$arc.\ B\Delta : arc.\ \Theta K > arc.\ N\Xi : arc.\ \Theta K.$$

Inde plane non liquet, utrum ratio diametri sphaerae ad diametrum circuli EΘ rationi *arc.* BΔ : *arc.* ΘK sit aequalis, an maior, an minor. Clavii autem demonstratio firma quidem est, si acciderit, ut tria puncta E, A, Γ sita sint ad partes easdem circuli maximi AKΞ, non autem admittitur, si punctum E ad unas et puncta A, Γ ad alteras partes sint circuli AKΞ.

Tam vero Clavium, quam ceteros, qui post eum operam suam posuerunt in Theodosio nostro, fugisse hocce momentum, eo magis miror, quia forma Theodosii geometrica ipsum casum non opportunum exhibet. Voegelini quidem Arabs per errorem recentiorum lapsus non est, at Maurolyci, sed culpa opinor interpretis.

Post propos. 13.

Corollarium. *Hinc etiam constat iisdem positis, arcus omnes circulorum maximorum inter parallelos illos interceptos aequales esse inter se.*

F. 65. Hoc est, inquam, aequales esse arcus AZ, ΘE, BH, ZΓ, EK, HΔ omnes inter se.

Namque quum sit

$$arc.\ AE = arc.\ E\Delta$$

et

$$arc.\ ZE = arc.\ EH,$$

erunt rectae AZ, ΔH aequales (3.), ideoque

$$arc.\ AZ = arc.\ \Delta H.$$

Sed est

$$arc.\ AZ = arc.\ \Theta E = arc.\ BH \text{ (II, 10. } aut \text{ 13.)}$$

et

$$arc.\ \Delta H = arc.\ EK = arc.\ Z\Gamma;$$

igitur arcus tres omnes aequales sunt inter sese.

Index verborum.

Numerus Romanus indicat librum, Arabicus propositionem, elementum D. definitiones.

ἐντός, intra. I, D. I, 3. III, 4. 5. 7.

ἑξῆς (καὶ τά), et quae deinceps sequuntur. I, 8. αἱ περιφέρειαι, arcus deinceps siti, continentes. III, 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

ἐπαφή, i. e. ἁφή. II, 23. III, 8.

ἐπειδήπερ, siquidem. I, 4. III, 1.

ἐπείπερ, siquidem. I, 21.

ἐπί, c. dat. I, 11.

ἐπιζεύγνυσθαι, coniungere. εὐθεῖαν, ducere rectam a puncto ad punctum. *Reperitur ubivis.*

ἐπίπεδος, planus. ἐπίπεδον sc. χωρίον, planum, planities. *Saepissime.*

ἐπιφάνεια, superficies. *Saepissime.*

ἐρεῖν, quaerere. II, 15.

ἔρειν (εἰρημένος), dictus. III, 4.

ἔρχεσθαι, venire. *De linea, quae per punctum transit, aut ad punctum ducta est.* I, 10. 15. 20. 21. II, 4. 5. 15. 19. 22. 23. III, 3. 4.

ἔστι δὲ. I, 3. 11. 12. 17. 18. 19. II, 9. 11. 12. 15. 18. 21. 23. III, 3. 4. 6. 8. 13.

ἕτερος, alter. I, D. I, 4. 9. II, 5. 6. 7. 8. 17. 22. III, 1. 2. (ὁ μὲν et ὁ δὲ ἕτερος opponuntur sibi) III, 5. 6. 9. 10. 11. *Quo minus iungamus* ὁ μὲν εἷς *ipse Theodosius vetat iungendo* ὁ μὲν ΒΖΓ εἷς τῶν παραλλήλων *rel.* III, 6.

ἔτι, porro, praeterea. II, 10. 13. 15. 21. 22. III, 1. 7. 8. 10.

εὐθύς, rectus. εὐθεῖα sc. γραμμή. *Ubivis invenitur.*

εὑρίσκειν, invenire. I, 2. 21.

ἐφάπτεσθαι, contingere. I, 4. II, D. II, 3. 4. 5. 6. 7. 8. 13. 14. 15. 16. 22. III, 7. 8. 11. 12. 13. 14. *Vid.* ἅπτεσθαι.

ἐφεξῆς, deinceps, αἱ γωνίαι. I, 7.

ἐφιστάναι, insistere. (*Activum*) I, 4. 7. II, 11. 12. III, 1. 2. 5. 6. 7. 8. (*Passiv.*) II, 11, 12. 13. 15. 22. 23. III, 1. 2. 5.

ἔχειν (ὡς ἔχει), uti se habet. III, 9. 10.

ἕως, usque ad. II, 19.

ἤ — ἤ, aut — aut. III, 13.

ἥκειν, venire, transire. I, 10. 20. 21. II, 4. 5. 6. 13. 15. 19. 22. 23. III, 3.

ἡμικύκλιον, semicirculus. I, 11. 13. 14. 17. II, 5. 13. 16. 19. III, 1. 2. 7. 8. 14. ἡμικυκλίου sc. περιφέρεια. II, 6. 13. 17. 19. III, 2.

ἥμισυς, εια, συ, pars dimidia. II, 11. 12. 13. 17. 22. 23. III, 5. 7. 8.

ἡμισφαίριον, pars dimidia sphaerae. II, 19. 20.

ἤπερ, quam. I, 6. II, 21. 22. III, 6. 10. 11. 12.

ἤτοι — ἤ, aut — aut. I, 21. II, 16. 17. III, 2. 3. 9. 13.

θεώρημα, theorema. II, 20. III, 6. *Praeterea est in fronte propositionum plurimarum.*

ἴσος, aequalis, ubique. ἴσον, loco adverb. I, 6.

ἱστάναι, sistere. I, 7.

καθήκειν, pertinere. II, 23.

κάθετος sc. εὐθεῖα γραμμή, linea perpendicularis. III, 1. κάθετον ἄγειν aut κάθετον εἶναι ἐπί τι. I, 1. 2. 4. 6. 8. 9. 10. 13. II, 1. 11. 12. 21. 22. III, 1. 2. 3. κάθετον εἶναι ἐπί τινος. I, 23.

καί, quam, atque. I, D. I, 6. 11. 13. 14. II, 21. (καί ἐστι) I, 1. 6. 16. 18. 19. II, 1. 6. 13. 15. 17. 19. 21. 22. 23. III, 1. 4. 5. 6. 7. 11.

κατά (κατὰ τὸ σημεῖον), ad partes puncti. III, 4.

καταγραφή, figura s. forma descripta. *Distinguitur a figura mente concepta* (σχῆμα). II, 16. III, 9. 10.

κατασκευάζειν, construere. I, 6 II. 21. III, 1.

κεῖσθαι, positum esse, iacere. I, D. II, 13. III, 6. 8. 9. 11.

κέντρον, centrum, e. g. circuli. *Saepis-*

sime. ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, radius, semidiameter. I, 4. 6.

κλίνειν, inclinare. I, D. II, 21. 22. 23. III, 2. 8.

κλίσις, inclinatio. II, 21.

κορυφή, vertex. II, 22.

κυκλικός, circularis. I, 22.

κύκλος, circulus. *Saepissime. Interdum circuli ambitum significat.* I, 6. 9. 17. III, 8.

λαμβάνειν, sumere. I, 2. 3. 4. 6. *Saepius.*

λέγειν, dicere, appellare. I, D. II, D. II, 21. λέγω ὅτι, *formula solemnis in unaquaque propositione reperitur.*

λόγος, ratio. λόγον ἔχειν, rationem habere. III, 10. 11. 12.

λοιπός, reliquus. II, 15. III, 1. λοιπόν, excessus. I, 6. 9. 10. 18. 19. 21. *Saepius.*

λοξός, obliquus. II, 8. 16. III, 5. 6. 7.

μᾶλλον, magis. II, 21. 22.

μανθάνειν, discere. II, 21.

μέγιστος, maximus. III, 1. 9. 10. (sc. κύκλος) circulus maximus sphaerae. I, 6. II, 14. 19. 22. III, 5. 6. 7. 11.

μείζων, maior. (*absolute*) II, 16. 18. 19. 22. III, 1. 5. 7. 8. 9. (*cum gen.*) I, 6. II, 13. 17. 18. 19. 21. 22. III, 1. 2. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. (ἤ) III, 9. 10. 12. (μείζων ἢ ὅμοιος) II, 20. III, 6. 8. 14. (μεῖζον, *loco adverb.*) I, 6.

μένειν, manere. ἡ εὐθεῖα μένουσα, recta immobilis. I, D.

μέρος, pars. *Vid.* ἀμφότερος, ἑκάτερος, αὐτός. ἐπὶ τὰ B μέρη, ad partes puncti B. III, 1. 2. 7. 8. 14. εἰς τὰ μέρη, in partes alicui convenientes. III, 9. 10.

μεταξύ, inter. II, 10. 13. 15. 16. *Saepius.*

μετεωρότερος, sublimior. II, 21. 22.

μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, non igitur, sed si potest. I, 2. 5. II, 4. 5. 16. μὴ ἔστω δή, igitur sit non. III, 10. εἰ γὰρ μή, ἤτοι — ἤ. III, 10.

μόνον, solum. *Adv.* II, 20.

νοεῖν, intelligere, cogitare. I, 19.

ὅλος, totus. I, 21. II, 6. 11. 12. *Saepius.*

ὁμογενής, eiusdem generis. III, 9.

ὅμοιος, similis. II, 10. 13. 16. 20. 22. 23. III, 6. 8. 12. 13. 14.

ὁμοίως, similiter. I, D. II, 13. 15. 21. 22. 23. III, 5. 9. ὁμοίως δὴ δείξομεν, I, 1. 2. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 12. 21. 23. II, 2. 3. 9. 10. 11. 12. 13. 15. 16. 17. 19. 20. 21. 22. 23. III, 1. 2. 3. 4. 5. 7. 10. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, I, 10. III, 2.

ὀξύς, acutus. III, 4. 11.

ὁπότερος, quisque ex pluribus (*non solum ex duobus*). III, 8. ὁποτεροσοῦν, quicunque. II, 21. 22. 23. III, 14.

ὀρθός, rectus. ἡ ὀρθὴ γωνία; ὀρθὸς πρός τι. I, 1. 4. 5. 6. *Saepius.* πρὸς ὀρθὰς sc. γωνίας, cum dat. I. D. I, 2. 5. 7. 8. 9. *Saepius.*

ὀρθότερος, rectior. II, 22.

ὀρθότατος, rectissimus. II, 22.

ὅρος, definitio. I, D. II, D. *Est in fronte definitionum.*

ὅσος. ὅσα, quotquot. II, 19.

ὅταν, quando. I, D. I, 7. II, D. II, 3. 21.

οὐ (ἤτοι — ἢ οὐ). I, 21. II, 16. 17. III, 3. 9. 10. οὐκ ἄρα οὐκ. II, 4. 5. 7. 16. οὐκ ἔστι. II, 8.

οὐδὲ ἄρα. I, 3. II, 18.

οὔτω, ita. III, 10.

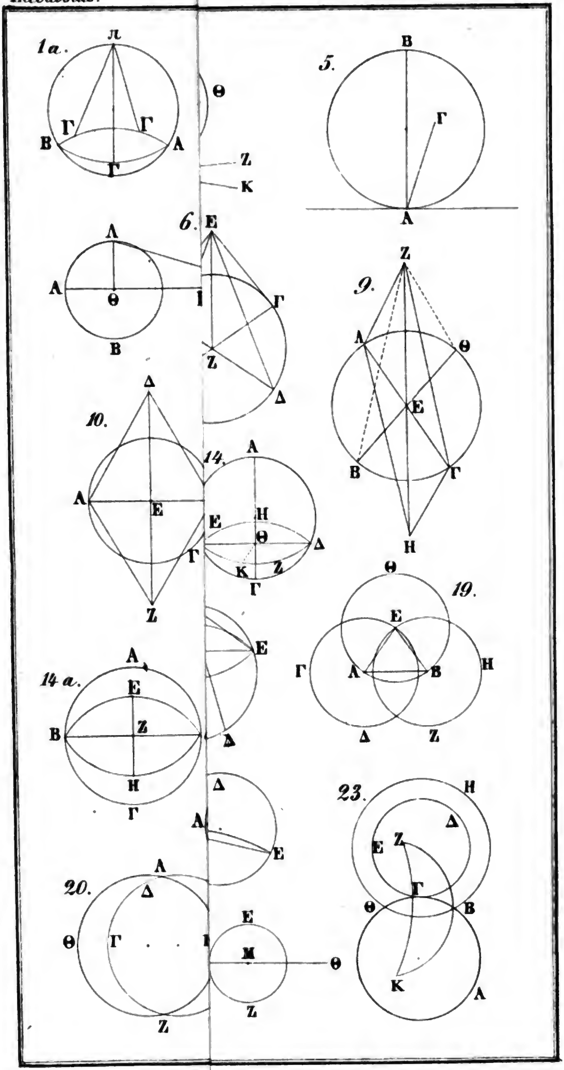
οὕτως, sic, ita. II, 13. 15. III, 10. 11.

πάλιν, porro, rursus. I, 4. 6. 10. 11. 20. 21. *Saepius.*

πάντως, generatim. I, 11. II, 9.

παρὰ — εἶναι, *c. accus.*, parallelum esse. II, 10. III, 11.

Typis Caroli Schultze.


1a.
5.
6.
9.
10.
14.
14 a.
19.
20.
23.